ESAIM: Proceedings
Élasticité, Viscoélasticité et Contrôle Optimal
Huitièmes Entretiens du Centre Jacques Cartier
URL: http://www.emath.fr/proc/Vol.2/

ESAIM: Proc., Vol. 2, 1997, 195–201

# SINGULARITES DES SOLUTIONS DU PROBLEME MELE, CONTROLABILITE EXACTE ET STABILISATION FRONTIERE

MOHAND MOUSSAOUI

Abstract. On considère dans ce travail l'influence des singularités des solutions du problème mêlé pour le Laplacien sur les questions de contrôlabilité exacte et de stabilisation frontière pour l'équation des ondes. On étudie plus précisément les conditions géométriques nécessaires pour la mise en oeuvre de la méthode d'unicité hilbertienne introduite par J.L. Lions en contrôlabilité exacte et de la méthode initiée par J. Lagnese et développée par exemple par V. Komornik et E. Zuazua pour la stabilisation frontière . On généralise, entre autres, des résultats de P. Grisvard en dimension deux et trois à une dimension $n$ quelconque.

**Mots-clés :** Problème mêlé. Singularités. Contrôlabilité. Stabilisation.
**Classification mathématique :** 35L05, 35Q72, 93B03, 93B07, 93C20, 93D15.

## 1. Introduction

Soit $\Omega$ un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de classe $C^3$, de frontière $\Gamma$. Soit $\Gamma_0$ et $\Gamma_1$ deux parties ouvertes de $\Gamma$ telles que $\Gamma = \overline{\Gamma}_0 \cup \overline{\Gamma}_1$ avec $mes(\Gamma_1) > 0$. Pour $T > 0$ on pose $Q_T = \Omega \times ]0, T[$, $\Sigma_{0,T} = \Gamma_0 \times ]0, T[$, $\Sigma_{1,T} = \Gamma_1 \times ]0, T[$.

1) Le problème de la contrôlabilité exacte est le suivant :

Trouver $T > 0$, un espace de données initiales H et un espace de contrôles $C$ tels que :

pour toute donnée initiale $(u_0, u_1) \in H$, il existe un contrôle $(g, h) \in C$ tels que la solution du problème (P1) :

$$\begin{cases} u'' - \Delta u = 0 \text{ dans } Q_T, \\ u(x,0) = u_0, \quad u'(x,0) = u_1, \\ u = g \text{ sur } \Sigma_{1,T}, \\ \partial u / \partial \nu = h \text{ sur } \Sigma_{0,T}, \end{cases} \tag{1.1}$$

définie dans un sens convenable, vérifie $u(T) = u'(T) = 0$

2) Le problème de la stabilisation frontière s'énonce comme suit :

On considère le problème (P2) :

$$\begin{cases} u'' - \Delta u = 0 \text{ dans } Q_T, \\ u(x,0) = u_0, \quad u'(x,0) = u_1, \\ u = 0 \text{ sur } \Sigma_{1,T}, \\ \partial u / \partial \nu = F(u') \text{ sur } \Sigma_{0,T}. \end{cases} \tag{1.2}$$

On définit l'énergie de la solution $u$ par :

$$E(u(t)) = \frac{1}{2}(\|\nabla u(t)\|^2_{(L^2(\Omega))} + \|u'(t)\|^2_{(L^2(\Omega))}).$$

La question est : peut-on choisir $\Gamma_0$, $\Gamma_1$ et $F$ de telle sorte qu'il existe $\omega > 0$ tel que :

pour tout $(u_0, u_1) \in H$, la solution $u$ de (P2) vérifie : $E(u(t)) \leq Ce^{-\omega t}$?

Ces types de problèmes ont été étudiés par divers auteurs. Citons, entre autres J. Lagnese [6], J.L. Lions [7], P. Grisvard [1], V. Komornik [4], V. Komornik - E. Zuazua [5], M.T. Niane - O. Seck [10]. On peut consulter également S.Nicaise [11], J.P. Puel - E. Zuazua [9].

Pour la contrôlabilité exacte comme pour la stabilisation frontière, la difficulté essentielle vient du fait qu'en général la solution du problème (P3) :

$$\begin{cases} u'' - \Delta u = 0 \text{ dans } Q_T, \\ u(x,0) = u_0, \quad u'(x,0) = u_1, \\ u = 0 \text{ sur } \Sigma_{1,T}, \\ \partial u/\partial \nu = 0 \text{ sur } \Sigma_{0,T}, \end{cases} \tag{1.3}$$

n'a pas, même pour des données très régulières, une dérivée normale qui soit dans $L^2(\Sigma_{1,T})$ dès que $\overline{\Gamma}_0 \cap \overline{\Gamma}_1$ est non vide et $T$ assez grand. En dimension $n \leq 3$, P. Grisvard [1] a introduit des conditions géométriques assez restrictives pour l'étude du problème de la contrôlabilité exacte. V. Komornik [4], V. Komornik - E. Zuazua [5] ont imposé la condition que $\overline{\Gamma}_0 \cap \overline{\Gamma}_1$ est vide, ce qui est également assez restrictif. On se propose dans ce travail d'étendre les résultats de [1] et [3] à la dimension $n$ quelconque et de donner des conditions moins restrictives pour la stabilisation frontière pour les problèmes étudiés par exemple par [6], [4], [5].

Le plan que nous avons adopté est le suivant. Au paragraphe 2, on rappelle quelques résultats sur la structure des solutions du problème mêlé dans une géométrie particulière en dimension 2, puis son extension à la dimension $n$, sous certaines conditions sur $\Gamma_0$ et $\Gamma_1$. Le paragraphe 3 est consacré à l'étude des solutions du problème (P3). On donnera ensuite au paragraphe 4 les applications qui découlent des deux précédents.

## 2. Etude des solutions du problème mêlé

### 2.1. Cas de la dimension deux

$\Omega_0$ désignant le demi-disque unité décrit en coordonnées polaires par :

$$\Omega_0 = \{(r,\theta)\,,\, 0 < r < 1 \text{ et } 0 < \theta < \pi\},$$

et $\Gamma$ sa frontière on pose : $\Gamma_0 = \{(r,\pi)\,,\, 0 < r < 1\}$ et $\Gamma_1 = \Gamma \backslash \overline{\Gamma_0}$.

On considère dans $\Omega_0$ le problème aux limites (PS1) :

$$\begin{cases} -\Delta_2 u = f \text{ dans } \Omega_0, \\ u = 0 \text{ sur } \Gamma_1, \\ \partial u/\partial \nu = 0 \text{ sur } \Gamma_0, \end{cases} \tag{2.4}$$

où $f$ est donnée dans $L^2(\Omega)$. $\partial/\partial n$ désigne la dérivée normale à $\Gamma_0$ orientée vers l'extérieur de $\Omega_0$ et $\Delta_2$ l'opérateur de Laplace en dimension 2.

Il est bien connu que la solution n'est pas, en général, dans $H^2(\Omega_0)$. On peut le voir sur le contre-exemple introduit par E. Shamir [12] :

$$u_s(r,\theta) = r^{1/2} sin(\theta/2)\phi(r)$$

avec $\phi \in D([0,1])$ valant 1 près de zéro et zéro près de 1. On peut montrer que $u_s \in H^s(\Omega)$ si et seulement si $s < 3/2$, que $-\Delta_2 u_s \in L^2(\Omega_0)$ et que $u$ satisfait les conditions aux limites de (PS1). Mais on vérifie aisément que $\partial u/\partial \nu$ n'est pas dans $L^2(\Gamma_1)$. Des résultats de [2], par exemple, on peut déduire une description plus précise de la solution de (PS1). On introduit pour cela la fonction $S^*(r,\theta) = 1/\pi(r^{-1/2} - r^{1/2})sin(\theta/2)$ qui est dans $L^2(\Omega_0)$.

THÉORÈME 1. *Soit $f \in L^2(\Omega_0)$ et $u$ la solution variationnelle de (PS1). Alors $u$ s'écrit : $u = u_r + cu_s$ avec : $u_r \in H^2(\Omega_0)$ et $c = \int_{\Omega_0} fS^*\, dxdy$.*

REMARQUE 2. Une conséquence immédiate de ce théorème est que plus de régularité sur $f$ ne donne pas plus de régularité sur $u$.

Dans la suite, on notera : $V = \{v \in H^1(\Omega_0) \,/\, v = 0 \text{ sur } \Gamma_1\}$ et :

$$D(\Delta_2) = \{u \in V \,/\, \Delta_2 u \in L^2(\Omega_0) \text{ et } \partial u/\partial\nu = 0 \text{ sur } \Gamma_0\}.$$

Du théorème précédent, il ressort que :

$$D(\Delta_2) = \{u \in H^2(\Omega_0) \cap V \,/\, \partial u/\partial\nu = 0 \text{ sur } \Gamma_0\} \oplus \mathbb{R}\, u_s.$$

## 2.2. Cas de la dimension $n$ avec $\Omega = \Omega_0 \times \mathbb{R}^d$

On s'intéresse tout d'abord à une géométrie particulière et on verra ensuite comment le cas général s'y ramène. On suppose que $\Omega$ est de la forme :

$$\Omega = \Omega_0 \times \mathbb{R}^d$$

où $\Omega_0$ est celui du paragraphe précédent et $d = n-2$. On notera $z$ la variable de $\mathbb{R}^d$, $\Gamma_D = \Gamma_1 \times \mathbb{R}^d$, $\Gamma_N = \Gamma_0 \times \mathbb{R}^d$. On considère dans $\Omega$ le problème mêlé (P4) :

$$\begin{cases} -\Delta_2 u - \Delta_z u = f \text{ dans } \Omega, \\ u = 0 \text{ sur } \Gamma_D, \\ \partial u/\partial\nu = 0 \text{ sur } \Gamma_N, \end{cases} \tag{2.5}$$

où $f$ est supposée donnée dans $L^2(\Omega)$.$\Delta_2$ (resp. $\Delta_z$) désigne le laplacien dans les variables $(x, y)$ de $\Omega_0$ (respectivement le laplacien dans les variables $z$ de $\mathbb{R}^d$ ). On a alors le résultat suivant :

THÉORÈME 3. *Soit $u$ la solution variationnelle de (P4). Alors :*

- *1. $\partial u/\partial z_i \in H^1(\Omega)$ , $i = 1, d$ ;*
- *2. $u$ se décompose sous la forme : $u(x, y, z) = u_r(x, y, z) + c(z)u_s$ où : $u_r(x, y, z) \in L^2(\mathbb{R}^d, H^2(\Omega_0))$ et : $c(z) \in H^{1/2}(\mathbb{R}^d)$.*

*Proof.* Le 1 s'obtient aisément en utilisant la technique des quotients différentiels dans les directions $z$.

Pour le 2, on effectue une transformation de Fourier par rapport à $z$ et notant $\zeta$ la variable duale, (P4) se transforme en :

$$\begin{cases} -\Delta_2 \hat{u} + |\zeta|^2 \hat{u} = \hat{f} \text{ dans } \Omega, \\ \hat{u} = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \times \mathbb{R}^d, \\ \partial \hat{u}/\partial\nu = 0 \text{ sur } \Gamma_0 \times \mathbb{R}^d. \end{cases} \tag{2.6}$$

Comme dans le théorème 1, on montre, qu'à $\zeta$ fixé, $\hat{u}(x, y, \zeta)$ s'écrit :

$$\hat{u}(x, y, \zeta) = \hat{u}_r(x, y, \zeta) + \hat{c}(\zeta)u_s$$

avec : $\hat{u}_r(x, y, \zeta) \in H^2(\Omega_0)$.

Il reste à vérifier que : $\hat{c}(\zeta)$ est dans $H^{1/2}(\mathbb{R}^d)$ ou encore que : $(1 + |\zeta|^2)^{1/4}\hat{c}(\zeta) \in L^2(\mathbb{R}^d)$.

Pour cela, on montre qu'il existe l'analogue de $S^*$, introduite au paragraphe 2.1 c'est-à-dire une fonction $\Sigma^*$, dans $L^2(\Omega_0)$ solution de :

$$\begin{cases} -\Delta_2 \Sigma^* + |\zeta|^2 \Sigma^* = 0 \text{ dans } \Omega, \\ \Sigma^* = 0 \text{ sur } \Gamma_1, \\ \partial \Sigma^*/\partial\nu = 0 \text{ sur } \Gamma_0. \end{cases} \tag{2.7}$$

l'équation étant vérifiée au sens des distributions et les conditions aux limites au sens faible, telle que le coefficient $\hat{c}(\zeta)$ est donné par:

$$\hat{c}(\zeta) = \int_{\Omega_0} \hat{f}(x,y,\zeta)\Sigma^*(x,y,\zeta)\, dxdy$$

de sorte que :

$$|\hat{c}(\zeta)| \leq \|\Sigma^*\|_{L^2(\Omega_0)} \|\hat{f}(.,.,\zeta)\|_{L^2(\Omega_0)}$$

et tout revient alors à estimer la norme dans $L^2(\Omega_0)$ de $\Sigma^*$ en fonction de $\zeta$. Le théorème 3 est une conséquence immédiate du lemme suivant. □

Lemme 4. *$\||\zeta|^{1/2}\Sigma^*\|_{L^2(\Omega_0)} \leq C$, où $C$ est une constante indépendante de $\zeta$.*

*Proof.* On introduit les éléments propres $(\lambda_k, \phi_k)$ tels que $-\Delta_2\phi_k = \lambda_k\phi_k$, $\phi_k \in D(\Delta_2)$. Les couples $(\lambda_k, \phi_k)$ pour lesquels $\phi_k$ n'est pas dans $H^2(\Omega)$ sont donnés par (cf. [8]) : $\lambda_k = k^2\pi^2$ , $\phi_k = 2(\pi r)^{-1/2} sin(k\pi r) sin(\theta/2)$. La fonction $S^*$, étant orthogonale aux fonctions propres régulières, s'écrit :

$$S^* = \sum_{k\geq 1} 2(k^{-1}\pi^{-3/2})\phi_k.$$

On recherche alors $\Sigma^*$ sous la forme $\Sigma^* = S^* + v$ avec $v \in H^1(\Omega)$. Utilisant les propriétés de $S^*$ et $\Sigma^*$, on montre que cette dernière s'écrit :

$$\Sigma^* = \sum_{k\geq 1} c_k\phi_k \text{ avec : } c_k = 2\pi^{1/2}\frac{k}{k^2\pi^2 + |\zeta|^2}.$$

Par suite :

$$\|\Sigma^*\|^2_{L^2(\Omega)} = 4\pi \sum_{k\geq 1} \frac{k^2}{(k^2\pi^2 + |\zeta|^2)^2}$$

d'où l'on déduit aisément que $|\zeta|^{1/2}\Sigma^*$ est bornée dans $L^2(\Omega)$ par une constante indépendante de $\zeta$. □

Remarque 5. Il est possible d'obtenir une autre décomposition de la solution $u$ de (P4) sous la forme :

$$u(x,y,z) = u_r(x,y,z) + c_1(z,\rho)u_s(x,y)$$

avec : $u_r(x,y,z) \in H^2(\Omega)$, $c_1(z,\rho) \in H^1(\mathbb{R}\times]0,1[)$ $(\rho^2 = x^2 + y^2)$.

Une conséquence du théorème 3, utile pour la suite, est le

Corollaire 6. *Soit $u$ la solution de (P4). Alors :*

$$\int_{\Gamma_N} (x^2+y^2)^{1/2}|\nabla u|^2\, d\Gamma + \int_{\Gamma_D} (x^2+y^2)^{1/2}|\frac{\partial u}{\partial \nu}|^2\, d\Gamma \leq C\|f\|^2_{L^2(\Omega)}$$

*où $C$ est une constante indépendante de $f$.*

## 3. Cas général en dimension $n \geq 3$

On suppose à présent que $\Omega$ est un ouvert de classe $C^3$ de frontière $\Gamma$. On suppose que $\Gamma$ est formée de deux parties $\Gamma_0$ et $\Gamma_1$ séparées par une hypersurface $\gamma$ de dimension $n-2$. On fera une hypothèse sur cette partition de $\Gamma$ de manière à pouvoir se ramener à la situation du paragraphe 2.1, en procédant par localisation. Cette hypothèse est suffisante mais éventuellement un peu restrictive. Elle est la suivante :

Pour tout $M \in \gamma$, il existe un voisinage $V$ de $M$ dans $\mathbb{R}^n$ et un $C^3$-difféomorphisme $\Phi$ de $V$ sur un voisinage $W$ de l'origine de $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y \times \mathbb{R}_z^d$ de la forme : $W = \{x^2 + y^2 < r_0^2, \|z\|^2 < 1\}$ avec :

$$\begin{aligned}
&\Phi(V \cap \Omega) = \{(x, y, z) \in W, y > 0\},\\
&\Phi(\gamma \cap V) = \{(x, y, z) \in W, x = y = 0\},\\
&\Phi(\Gamma_D \cap V) = \{(x, 0, z) \in W, x < 0\},\\
&\Phi(\Gamma_N \cap V) = \{(x, 0, z) \in W, x > 0\}.
\end{aligned}$$

Si l'on considère la solution variationnelle du problème :

$$\begin{cases} -\Delta_2 u = f \text{ dans } \Omega,\\ u = 0 \text{ sur } \Gamma_1,\\ \partial u/\partial\nu = 0 \text{ sur } \Gamma_0, \end{cases} \tag{3.8}$$

où $f$ est donnée dans $L^2(\Omega)$, il est bien connu que $u$ est $H^2$ en dehors de tout voisinage de $\gamma$. Il reste à étudier la structure de $u$, au voisinage de cette dernière. Soit donc $M$ un point de $\gamma$ et $V$ un voisinage de $M$ vérifiant l'hypothèse ci-dessus.

Soit $\theta \in D(\mathbb{R}^n)$ à support dans $V$ égale à 1 près de $M$. On pose $u_0 = \theta u$. $u_0$ vérifie un problème du type :

$$\begin{cases} -\Delta_2 u_0 = f_1 \text{ dans } \Omega,\\ u_0 = 0 \text{ sur } \Gamma_1,\\ \partial u_0/\partial\nu = g \text{ sur } \Gamma_0, \end{cases} \tag{3.9}$$

avec : $g = u\partial\theta/\partial\nu \in H_{0,0}^{1/2}(\Gamma_0 \cap W)$.

Par le difféomorphisme $\Phi$ on transporte ce problème dans $W$. Il s'écrit :

$$\begin{cases} AU = F \text{ dans } W,\\ U = 0 \text{ sur } \Gamma_D,\\ \partial U/\partial n_A = G \text{ sur} \Gamma_N, \end{cases} \tag{3.10}$$

où $A$ est un opérateur du deuxième ordre à coefficients variables de classe $C^1$, $\partial/\partial n_A$ la dérivée conormale relative à l'opérateur $A$, $F$ et $G$ deux fonctions de $L^2(W)$ et $H_{0,0}^{1/2}(\Gamma_N)$ respectivement.

L'étude de la structure de $U$ se fait alors en plusieurs étapes. On se ramène d'abord par un relèvement à $G = 0$ puis on montre que les dérivées $\partial U/\partial z_i$ sont dans $H^1(W)$. Ceci permet dans la première équation du problème (3.10) de faire passer les dérivées croisées en $(x, z)$ et $(y, z)$ du premier membre au second, d'où une nouvelle équation de la forme :

$$A_0(x, y, z, D)U = F_1.$$

La structure de $U$ sera obtenue alors en écrivant :

$$A_0(x, y, z, D)U = A_0(0, 0, z, D)U + A_0(x, y, z, D)U - A_0(0, 0, z, D)U,$$

et en se ramenant par un argument de perturbation et un nouveau changement de variables au problème (2.5) dans $\Omega_0 \times \{\|z\| < 1\}$. Au total on établit que U s'écrit :

$$U(x, y, z) = U_r(x, y, z) + C(z)U_s(x, y),$$

avec : $U_r \in L^2(\{\|z\| < 1\}, H^2(\Omega_0))$ et $C \in H^{1/2}(\{\|z\| < 1\})$.

En revenant à $u_0 = \theta u$, cela donne alors que, dans le voisinage $V$ de $M$ ou éventuellement un plus petit, les dérivées premières de $u$, conormales à $\gamma$ sont dans $H^1(V)$ et une décomposition de la solution $u$ sous la forme :

$$u = u_r + c(z) u_s,$$

où $u_r$ est $H^2$ loin de $\gamma$ et $H^2$ dans les directions conormales à $\gamma$, au voisinage de cette dernière et $u_s$ la transportée de $U_s$ par le difféomorphisme inverse de $\Phi$. Utilisant ensuite le corollaire 6 on obtient que :

$$\|d(M,\gamma)^{1/2} \nabla u\|_{L^2(\Gamma)} \leq C \|f\|_{(L^2(\Omega)}.$$

## 4. Application à la contrôlabilité exacte et la stabilisation frontière

Il s'agit, dans ce paragraphe, de voir sous quelles conditions sur $\Omega$, $\Gamma_0$ et $\Gamma_1$, on peut donner une réponse positive aux questions de contrôlabilité exacte et de stabilisation frontière pour les problèmes (P1) et (P2) respectivement. On se restreindra à la situation suivante :

On se donne $x^0$ un point de $\mathbb{R}^n$ et on pose $m(x) = (x - x^0)$. On définit :

$$\Gamma_0 = \{x \in \Gamma / m(x) \cdot \nu > 0\}.$$

On pose : $\Gamma_1 = \Gamma \backslash \overline{\Gamma_0}$ et on suppose que : $\overline{\Gamma_0} \cap \overline{\Gamma_1} = \gamma$ est non vide. On considère le problème mêlé associé à cette partition de la frontière et une donnée $f$ dans $L^2(\Omega)$. On a alors une réponse positive si la solution $u$ du problème considéré vérifie :

$$\begin{aligned}\int_\Omega \Delta u (m \cdot \nabla u)\, dx \leq \quad & (n-2) \int_\Omega |\nabla u|^2\, dx + \int_\Gamma \partial u / \partial \nu (m \cdot \nabla u)\, d\Gamma \\ & - \int_\Gamma (m \cdot \nu) |\nabla u||^2\, d\Gamma, \qquad (*)\end{aligned}$$

voir par exemple [1], [4], [5], [9]. Nous donnons à présent une condition géométrique, notée dans la suite (C.G.), qui assure que (*) a bien lieu. On suppose qu'au voisinage de tout point $M$ de $\gamma$, il existe :

- 1. un système de coordonnées $(x, y, z)$ de $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ d'origine $M$,
- 2. un pavé $P = ]-a, a[ \times ]-b, b[ \times P'$ où $P'$ est un pavé de $\mathbb{R}^d$,
- 3. deux fonctions de classe $C^3$ $\phi$ de $]-b, b[ \times P'$ dans $\mathbb{R}$ et $\theta$ de $P'$ dans $\mathbb{R}$ telles que :
  - a. $\nabla \theta = 0$ en $z = 0$ ; $\nabla \phi = 0$ en $(x, z) = (0, 0)$,
  - b. $\Omega \cap P = \{(x, y, z) \in \Omega; z \in P', |x| < a, y > \phi(x, z)\}$,
  - c. $\Gamma_D \cap P = \{(x, y, z) \in \Gamma \cap P; x < \theta(z)\}$,
  - d. $\Gamma_N \cap P = \{(x, y, z) \in \Gamma \cap P; x > \theta(z)\}$.

Dans ce système de coordonnées, il est clair que la normale à $\Gamma$ en $M$, orientée vers l'extérieur de $\Omega$ est ${}^t(0, -1, 0)$.

On note alors $\tau(M)$ le vecteur ${}^t(-1, 0, 0)$. En utilisant les résultats des paragraphes précédents on obtient le :

Théorème 7. *Soit $f \in L^2(\Omega)$. La solution $u$ du problème (2.5) vérifie l'identité :*

$$\begin{aligned}\int_\Omega \Delta u (m \cdot \nabla u)\, dx dy dz = \quad & (n-2) \int_\Omega |\nabla u|^2\, dx + \int_\Gamma \partial u / \partial \nu (m \cdot \nabla u)\, d\Gamma \\ & - \int_\Gamma (m \cdot \nu) |\nabla u||^2\, d\Gamma + \int_\gamma (m \cdot \tau) c(\sigma)^2\, d\gamma\end{aligned}$$

*où $c(\sigma)$ désigne le coefficient de singularité obtenu dans la décomposition de la solution en partie régulière et singulière au voisinage de $\gamma$.*

On notera que chacun des termes du deuxième membre de l'égalité a, vus les résultats du paragraphe précédent, un sens et est majoré par $f$ en norme $L^2$. On notera également ici le rôle de l'orientation du vecteur $\tau$.

On déduit immédiatement de cette égalité le :

COROLLAIRE 8. *On suppose que $m \cdot \tau \leq 0$ sur $\gamma$. Alors (*) a lieu.*

REMARQUE 9. Lorsque $\Omega$ est borné strictement convexe (i.e. la fonction $\phi$ de la condition (C.G) a une matrice hessienne définie positive) et $x^0 \notin \Omega$, alors (*) a lieu. En dimension 3, si $\Omega$ est un polyèdre borné convexe et $x^0 \notin \Omega$, alors (*) a lieu.

## REFERENCES


[1] P. GRISVARD. *Contrôlabilité exacte des solutions de l'équation des ondes en présence de singularités.* J. Math. pures et appli., 68, pp 215-259 (1989).

[2] P. GRISVARD. *Elliptic problems in nonsmooth domains.* Monographs and Studies in Mathematics 21, Boston, (1985).

[3] A. HEIBIG - M. MOUSSAOUI. *Exact controllability of the wave equation for a domain with slits and for mixed boundary conditions.* Preprint Ec. Norm. Sup. de Lyon (1993). A paraître in Discrete and Continuous Dynamical systems.

[4] V. KOMORNIK. *On the nonlinear boundary stabilization of the wave equation.* Chin. Ann. of Math. 14B:2, pp 153-164 (1993).

[5] V. KOMORNIK - E.ZUAZUA *A direct method for the boundary stabilization of the wave equation.* J. Math. pures et appli., 69, pp 33-54 (1990).

[6] J. LAGNESE. *Decay of Solutions of Wave Equations in a Bounded Region with Boundary Dissipation.* Arch. Rat. Mech. Anal. 43, pp 304-318 (1971).

[7] J.L. LIONS. *Contrôlabilité exacte, perturbations et stabilisation de systèmes distribués.* tome 1, RMA 8 Masson. Paris, (1988).

[8] M. MOUSSAOUI - B.SADALLAH. *Régularités des coefficients de singularité pour l'équation de la chaleur dans un ouvert polygonal.* C. R. A. S. Paris, 293, pp 297-300 (1981).

[9] J.P. PUEL - E.ZUAZUA *Exact controllability for a model of multidimensional flexible structure.* Proc.Royal Soc. Edinburgh, 123 A, pp 323-344 (1993).

[10] M.T. NIANE - O.SECK. *Contrôlabilité exacte de l'équation des ondes avec conditions mêlées.* C. R. A. S. Paris, 318, pp 945-948 (1974).

[11] S. NICAISE. *Exact controllability of a pluridimensional coupled problem.* Revista Math. Univ. Complutense Madrid 5, pp 91-135 (1992).

[12] E. SHAMIR. *Regularity of mixed second order elliptic problems.* Israel Math. Journal, 6, pp 150-168 (1968).


DÉPARTEMENT M.I.S. ET UMR CNRS 5585, ECOLE CENTRALE DE LYON, 36 AVENUE DE COLLONGUES, 69131 ECULLY CEDEX, FRANCE