

APPLICATION D'UNE METHODE PAR CRITERE D'OPTIMALITE A L'OPTIMISATION DE REVETEMENTS AMORTISSANTS.

C. REMILLAT, L. JEZEQUEL

ABSTRACT. Un algorithme de minimisation, basé sur une méthode dite par critère d'optimalité, est présentée. Contrairement aux méthodes classiques, il permet de tenir compte de contraintes fortement non linéaires pour des problèmes de grande taille. La suite récurrente conduisant aux valeurs optimales des variables de conception est construite directement à partir des conditions de Kuhn et Tucker, les multiplicateurs de Lagrange étant obtenus par résolution d'un système linéaire. L'accent est mis en priorité sur les exemples traités, qui sont des poutres et plaques multicouches, préalablement modélisés par la méthode des éléments finis.

Mots-clés : optimisation-critère d'optimalité-amortissement-élément fini

1. INTRODUCTION

L'intérêt des mécaniciens pour les méthodes d'optimisation sous contraintes est relativement ancien, et prend sa source dans la difficulté de dimensionner efficacement des structures, principalement issues du génie civil, telles que des arches, dômes, ponts, treillis de poutres... Tout l'art consiste en effet à redistribuer la matière, de manière à augmenter la rigidité dans les zones à fortes contraintes, à la diminuer dans les zones à faibles contraintes.

Vers le début des années 70, l'utilisation croissante de la méthode des éléments finis pour modéliser les structures complexes a généré le besoin d'algorithmes puissants, capables de résoudre des problèmes d'optimisation avec beaucoup de contraintes et un nombre important de variables de conception. Les méthodes de programmation mathématique, mal adaptées aux grandes structures, nécessitant beaucoup d'opérations de réanalyse, ont peu à peu été fortement concurrencées par des méthodes dites par critère d'optimalité. Ces méthodes sont basées sur l'établissement de conditions nécessaires, pour lesquelles un optimum lié local est atteint, et nécessitent moins d'itérations que les méthodes de programmation mathématique. En particulier, leur vitesse de convergence observée ne dépend pas du nombre de variables de conception, ce qui est primordial dans le cas de problèmes de grande taille. Classiquement, le critère d'optimalité employé a longtemps reposé sur des considérations physiques plus ou moins intuitives (cf [17] pour une revue des principales tendances des années 70), conduisant parfois à des échecs inexplicables. Peu à peu, des approches plus rigoureuses ont permis d'augmenter la fiabilité des méthodes par critère d'optimalité. En particulier, Fleury [3] a montré que, dans le cas de contraintes de type statique, le concept intuitif de contraintes actives (contraintes inégalité saturées) peut mener à des difficultés numériques. D'autre part, ses travaux (cf [4] et [14]) ont permis d'établir un lien entre les méthodes de programmation mathématique et certains critères d'optimalité classiques, contribuant à donner un fondement

mathématique à ces méthodes. Actuellement, le critère d'optimalité utilisé est souvent directement déduit des conditions de Kuhn et Tucker, conditions nécessaires pour obtenir un optimum lié en programmation non linéaire. Beaucoup d'applications des méthodes par critère d'optimalité ont consisté à optimiser la masse structurale avec des contraintes de types statique. Peu d'auteurs se sont intéressés aux contraintes dynamiques. La résolution de ce problème est pourtant d'un intérêt crucial. En décalant la fréquence fondamentale d'une structure par exemple, il est possible d'éviter son couplage vibratoire avec une structure adjacente. Ceci contribue ainsi à réduire les phénomènes de fatigue et de bruit. Khan [7] et Sadek [13] ont étudié le cas d'une seule contrainte, en cherchant à maximiser la première fréquence propre de poutres ou assemblages de poutres. Jan [6] et Truman [16] ont traité le cas de plusieurs contraintes portant sur les fréquences propres, et ont utilisé une approche équivalente à celle qui sera développée ci-dessous. Les travaux effectués ici sont dans la continuité directe de ceux menés par Suweca [15]. Ils portent sur l'optimisation de la masse d'une structure recouverte d'un matériau amortissant. L'objectif consiste à atteindre un amortissement modal donné, pour une fréquence fixée par l'utilisateur. Les contraintes peuvent évidemment concerner un ou plusieurs modes de la structure. Pour se faire, il est nécessaire de disposer à la fois d'un algorithme fiable d'optimisation, et d'un modèle réaliste de la structure à optimiser. Diverses applications sur des poutres ou plaques multicouches seront présentées, en insistant particulièrement sur l'interprétation physique des résultats obtenus.

2. PRÉSENTATION DE L'ALGORITHME UTILISÉ

Formellement, le problème se pose de la manière suivante: *soit une fonction objectif $J(u)$ dépendant d'un vecteur de variables de conception u , trouver le vecteur \tilde{u} tel que:*

$$\begin{cases} \tilde{u} \in U \stackrel{\text{déf}}{=} \{u \in \mathbb{R}^n ; g_j(u) \leq 0, 1 \leq j \leq m\} \\ J(\tilde{u}) = \inf J(u) \end{cases} \quad (1)$$

les contraintes g_j étant qualifiées (cf ref [1]).

Les conditions nécessaires en programmation non linéaire pour que le problème précédent ait une solution sont les conditions de Kuhn et Tucker, qui expriment l'existence de nombres λ_j tels que

$$\begin{cases} J'(u) + \sum_{j=1}^m \lambda_j g'_j = 0 \\ \lambda_j \leq 0, 1 \leq j \leq n_1 \end{cases} \quad (2)$$

avec

$$\begin{cases} g_j = 0, 1 \leq j \leq n_1 \\ g_j \leq 0, n_1 + 1 \leq j \leq m \end{cases} \quad (3)$$

Ici, la fonction objectif est la masse de la structure discrétisée:

$$J(h_i) = \sum_{i=1}^{nlm} \rho_i h_i b \quad (4)$$

nlm, ρ_i, h_i, b étant respectivement le nombre d'éléments de la structure discrétisée; les masse volumique, épaisseur, et section d'un élément i . Les variables de conception considérées seront les épaisseurs h_i .

Les contraintes portent sur l'amortissement modal et les fréquences propres des modes sélectionnés. Pour simplifier, les contraintes seront traitées comme des contraintes égalité, ce qui permettra de s'affranchir de la délicate étape de sélection des contraintes actives et passives. Les multiplicateurs de Lagrange associés ne sont alors plus contraints en signe. A ces contraintes viennent s'ajouter des limites inférieures et supérieures sur les variables de conception, qui sont traitées à part.

Pour résoudre ce problème, diverses stratégies peuvent être employées. Khot [8] a proposé une revue comparative des principales possibilités qui s'offrent à l'utilisateur. Ici, la relation de récurrence sur les variables de conception est obtenue à partir des conditions de Kuhn et Tucker. En mettant l'équation de (2) sous la forme:

$$1 = - \sum_{j=1}^m \frac{\lambda_j}{\frac{\partial J}{\partial h_i}} \frac{\partial g_j}{\partial h_i} \quad (5)$$

puis en multipliant de part et d'autre par $(1 - \alpha)h_i$ et en réarrangeant, une relation de récurrence linéaire pour les variables de conception est bâtie, qui est donnée sous forme vectorielle par:

$$\langle h^{r+1} \rangle = \alpha h^r \rangle - (1 - \alpha) \tilde{G} / \lambda \rangle \quad (6)$$

avec

$$\tilde{G}_{ij} = \frac{h_i}{\frac{\partial J}{\partial h_i}} \frac{\partial g_j}{\partial h_i} \quad (7)$$

où α est un paramètre de relaxation compris entre 0 et 1, à choisir au mieux. Le choix de α conditionne de manière déterminante la convergence de l'algorithme: trop faible, la vitesse de convergence est lente, trop fort, le changement de valeurs pour les variables de conception est trop brutal, et l'algorithme peut osciller, voir même parfois diverger. Ko [9] propose d'associer un facteur de relaxation à chaque variables de conception, ces facteurs évoluant de manière à juguler les phénomènes d'oscillations. En

général, un unique α est utilisé, et son choix relève de l'intuition et de l'expérience. Pour ne pas alourdir les calculs numériques, c'est cette option qui a été utilisée ici, l'objectif n'étant pas de proposer une méthode la plus performante possible, mais fournissant des résultats acceptables dans un temps minimum et pour un coût calculatoire le plus faible possible.

Pour compléter l'algorithme, une relation permettant de calculer les multiplicateurs de Lagrange à chaque itération est nécessaire. Celle-ci est obtenue en utilisant un développement en série de Taylor au premier ordre, et en postulant que les contraintes seront nulles au pas suivant. A chaque itération, les multiplicateurs de Lagrange sont donc calculés en résolvant le système linéaire suivant:

$$G^t \tilde{G} / \lambda^{r+1} = \frac{1}{1 - \alpha} \langle g \rangle - G^t / h^r \quad (8)$$

où G^t est la matrice transposée de la matrice G définie par:

$$G_{ij} = \frac{\partial g_j}{\partial h_i} \quad (9)$$

L'intérêt de cette relation est qu'il n'est pas nécessaire de donner un vecteur de départ pour les multiplicateurs de Lagrange. Par contre, elle entraîne la résolution d'un système linéaire à chaque itération, ce qui peut s'avérer numériquement lourd.

Durant le processus, il se peut que des variables de conception atteignent des valeurs physiquement inacceptables (les h_i ne peuvent pas être négatifs par exemple). Dans ce cas, les variables concernées se voient assigner la valeur de leur borne supérieure ou inférieure, et elles sont éliminées du groupe des variables actives, c'est à dire qu'elles ne participent à aucune opération pendant une itération. De même, si pendant trois itérations certaines variables de conception varient faiblement, elles sont retirées définitivement du cycle. A chaque pas, la convergence de l'algorithme est testé. Le choix du critère de convergence reste délicat. Ici, il porte à la fois sur la convergence de la fonction objectif, la satisfaction des contraintes et la stabilité des variables de conception. Cette stratégie est alors appliquée à plusieurs cas de structures amorties en vue de déterminer et d'analyser la localisation optimale du revêtement amortissant.

3. PRÉSENTATION ET MODÉLISATION DES CAS TRAITÉS

Trois exemples ont été étudiés. Ils abordent à la fois le cas de structures monodimensionnelles (poutres bi ou tricouches), et bidimensionnelles (plaques bicouches). Deux mécanismes différents de dissipation d'énergie sont aussi appréhendés: par traction-compression ou cisaillement du revêtement amortissant. Dans le cadre de modèles viscoélastiques linéaires, les phénomènes de dissipation sont pris en compte par l'intermédiaire de modules complexes. Ceci conduit à des pulsations complexes, dont la partie imaginaire représente l'amortissement associé. L'objectif global est alors

d'optimiser cet amortissement modal pour un coût numérique réduit. Pour ce faire, un effort de modélisation a dû être effectué.

3.1. STRUCTURES BICOUCHES

La construction de modèles simples posent peu de problèmes dans ce cas. Les hypothèses de base consistent à dire que chaque couche se comporte individuellement comme une poutre Euler-Bernouilli pour les poutres bicouches, comme une plaque de Kirchoff pour les plaques bicouches. La minimisation de la fonctionnelle de Hamilton conduit alors à des équations, pour le mouvement transversal harmonique W , formellement identiques à celles des structures homogènes associées.

Pour la poutre bicouche:

$$E^*I \frac{d^4W(x)}{dx^4} - \rho\omega^{*2}W(x) = 0 \quad (10)$$

où

$$E^*I = E_1I_1 + E_2(1 + i\eta)I_2 = E(1 + i\eta') \quad (11)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} I_1 = \frac{h_1^3}{12} + h_1\left(h - \frac{h_1}{2}\right)^2 \\ I_2 = \frac{h_2^3}{12} + h_2\left(h_1 + \frac{h_2}{2} - h\right)^2 \\ h = \frac{1}{2} \frac{E_1h_1^2 + E_2h_2^2 + 2E_2h_1h_2}{E_1h_1 + E_2h_2} \\ \rho = \rho_1h_1 + \rho_2h_2 \end{array} \right. \quad (12)$$

Les indices 1 et 2 se rapportent respectivement à la plaque de base et au viscoélastique, E_i , ρ_i , h_i désignent les module d'Young, masse volumique, épaisseur d'une couche i , h étant la distance du plan inférieur de la plaque de base à l'axe neutre de la poutre composite.

Les conditions aux limites associées sont:

- encastrement à un bord
déplacement et rotation nuls

$$W = 0 \quad \text{et} \quad \frac{dW}{dx} = 0 \quad (13)$$

- bord libre
effort normal et moment nuls

$$Q = \frac{d}{dx}(E^*I \frac{d^2W}{dx^2}) = 0 \quad \text{et} \quad M = E^*I \frac{d^2W}{dx^2} = 0 \quad (14)$$

Pour la plaque bicouche:

$$(D_1 + D_2)\nabla^4 W - (\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2)\omega^2 W = 0 \quad (15)$$

avec

$$\begin{cases} D_1 = \frac{E_1}{12(1-\nu_1^2)}[h_1^3 + 12h_1 d^2] \\ D_2 = \frac{E_2}{12(1-\nu_1^2)}[h_2^3 + 12h_2(h_{12} - d)^2] \\ d = \frac{\frac{E_2}{(1-\nu_1^2)}h_2 h_{12}}{\frac{E_1}{(1-\nu_1^2)}h_1 + \frac{E_2}{(1-\nu_1^2)}h_2} \end{cases} \quad (16)$$

où 1 se réfère à la plaque de base, et 2 à la couche viscoélastique, E_i , ν_i , ρ_i , h_i sont respectivement les module d'Young, coefficient de poisson, masse volumique, épaisseur d'une couche i , d est la distance entre l'axe neutre du composite et la plaque de base, h_{12} est la distance entre les plans neutres de la plaque de base et de la couche viscoélastique.

Les conditions aux limites associées sont celles d'une plaque Love-Kirchoff (cf [10]), pour laquelle il faut remplacer l'expression des moments et efforts tranchants par ceux d'une plaque composite, soit:

- encastrement à un bord
déplacement et rotation nuls

$$W = 0 \quad \text{et} \quad -\frac{\partial W}{\partial n} = 0 \quad (17)$$

- bord libre
force de réaction totale et moment nuls

$$V_n = Q_n + \frac{\partial M_{nt}}{\partial t} = 0 \quad \text{et} \quad M_n = 0 \quad (18)$$

où Q_n est l'effort tranchant, M_n et M_{nt} sont les moments de torsion et fléchissant, pour des directions normales et tangente à la surface de la frontière (n et t). Leur expression littérale pour une plaque bicouche est:

$$\begin{cases} Q_n = -D\left(\frac{\partial^3 W}{\partial n^3} + \frac{\partial^3 W}{\partial n \partial t^2}\right) \\ M_{nt} = -[D_1(1 - \nu_1) + D_2(1 - \nu_2)] \frac{\partial^2 W}{\partial n \partial t} \\ M_n = -(D_1 + D_2) \frac{\partial^2 W}{\partial n^2} - (D_1 \nu_1 + D_2 \nu_2) \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \end{cases} \quad (19)$$

3.2. STRUCTURE TRICOUCHE

La détermination de modèles simples est cette fois-ci plus délicate. Dowell [2] a donné l'expression du mouvement transverse d'une poutre tricouche, en vibrations harmoniques, sous les hypothèses suivantes:

- chaque couche se comporte individuellement comme une poutre de Timoshenko
- le cœur est viscoélastique linéaire
- les interfaces entre les couches sont parfaites
- les modules d'Young et de cisaillement du cœur sont faibles par rapport à ceux des plaques de base et de précontrainte
- seule la composante transverse de l'accélération est conservée

l'équation de mouvement est donnée alors par:

$$-\gamma \rho_1 h_1 \omega^{*2} W(x) + \alpha \frac{E_1}{G_2^*} A_{10} \gamma \rho_1 \omega^{*2} \frac{d^2 W(x)}{dx^2} + \beta E_1 I_{10} \frac{d^4 W(x)}{dx^4} = 0 \quad (20)$$

où

$$\begin{cases} \alpha = \left(\frac{\bar{h}_2}{1 + \bar{h}_2 + \bar{h}_3}\right) \left(\frac{\bar{E}_3(\bar{A}_{30} - \bar{h}_3)}{1 + \bar{E}_3 \bar{h}_3}\right) \\ \beta = 1 + \bar{E}_3 \bar{I}_{30} - \frac{(1 + \bar{E}_3 \bar{A}_{30})^2}{1 + \bar{E}_3 \bar{h}_3} \frac{A_{10}^2}{I_{10} h_1} \\ \gamma = 1 + \bar{\rho}_2 \bar{h}_2 + \bar{\rho}_3 \bar{h}_3 \\ \bar{E}_3 = \frac{E_3}{E_1} \\ \bar{I}_{30} = \frac{I_3}{I_1} \\ \bar{A}_{30} = \frac{A_3}{A_1} \\ \bar{\rho}_i = \frac{\rho_i}{\rho_1} \quad o \ i = 1 \text{ ou } 3 \end{cases} \quad (21)$$

où les différentes couches sont indicées comme précédemment, h_i , ρ_i , E_i sont successivement les épaisseurs, masses volumiques et modules d'Young d'une couche i , et A_i , I_i représentent les moments de section et d'inertie d'une couche i relativement au plan inférieur de la plaque de base, W est le déplacement transverse de la poutre composite.

Les conditions aux limites de bord libre et d'encastrement, obtenues par affaiblissement de la forme forte (20), sont formellement semblables aux équations (13) et (14), où Q et M sont maintenant donnés par:

$$\begin{cases} Q = \beta E_1 I_{10} \left(\frac{d^3 W}{dx^3} + \frac{1}{G_2^*} \frac{A_{10} \rho_1 h_1}{I_{10}} \frac{\alpha \gamma}{\beta} \omega^2 \frac{dW}{dx} \right) \\ M = \beta E_1 I_{10} \frac{d^2 W}{dx^2} \end{cases} \quad (22)$$

3.3. DISCRÉTISATION ÉLÉMENTS FINIS

Un modèle discrétisé de ces équations est construit. La formulation EF peut s'effectuer directement pour les structures bicouches. Pour la poutre tricouche, une méthode de résidus pondérée est adoptée. L'équation (15) est affaiblie, ce qui permet ici de retrouver des conditions aux limites physiquement acceptables. Ceci n'est évidemment pas généralisable, puisque la construction d'un principe variationnel partant des équations de mouvement locales restent un problème ouvert et complexe.

Les éléments finis obtenus sont simples (2 noeuds pour les poutres, 4 pour la plaque), et compatibles grâce à l'utilisation de fonctions de forme de type polynômes d'Hermite du premier ordre. La compatibilité des éléments n'est pas une condition nécessaire, mais elle permet d'assurer la convergence uniforme du modèle élément fini.

4. APPLICATIONS

4.1. POUTRE BICOUCHE

La poutre étudiée est encadrée à son extrémité gauche. Les variables de conception sont les épaisseurs des deux couches. Une limite inférieure de 1 mm est fixée pour la plaque de base. Les contraintes imposées sont:

- que la partie réelle de la première pulsation propre soit conservée
- que la partie imaginaire de la première pulsation propre soit doublée

La figure 1 montre les configurations initiale et finale. Après optimisation, le revêtement est positionné vers l'encastrement. C'est à cet endroit que l'énergie de dissipation est la plus forte, puisque les contraintes et les déformations de traction-compression sont maximales. C'est aussi là que les épaisseurs de la plaque de base sont les plus importantes. Ceci permet alors de conserver un rapport raideur sur masse constant, de manière à satisfaire la première contrainte.

4.2. PLAQUE BICOUCHE

La plaque considérée est encadrée à gauche. Seules les épaisseurs du revêtement sont cette fois-ci optimisées. Les contraintes considérées sont les mêmes que précédemment.

Le revêtement amortissant est maintenant concentré sur deux éléments de l'encastrement (cf fig 2). Ceci correspond effectivement aux zones de contraintes et déformations maximales, celles-ci n'étant pas distribuées uniformément le long de l'encastrement dans le cas d'une plaque. D'autre part, les épaisseurs localisées à l'extrémité libre ne servent en fait qu'à satisfaire la première contrainte sur la fréquence propre. Elles ne font office que de masses ajoutées, pour maintenir le rapport raideur sur masse constant.

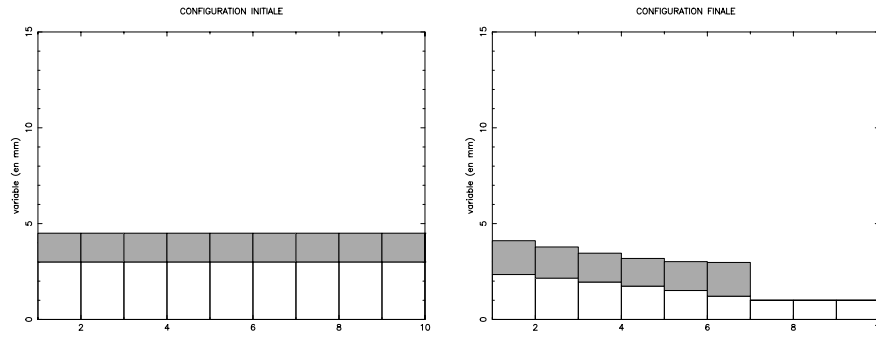


FIGURE 1. Comparaison entre les configurations initiale et finale pour l'optimisation d'une poutre bicouche aluminium-viscoélastique, de caractéristiques suivantes: $longueur = 28\text{ cm}$, $E_1 = 7.10^{10}\text{ Pa}$, $\rho_1 = 2700\text{ kg/m}^3$, $E_2 = 2.10^9(1 + 0.5i)\text{ Pa}$, $\rho_2 = 1750\text{ kg/m}^3$

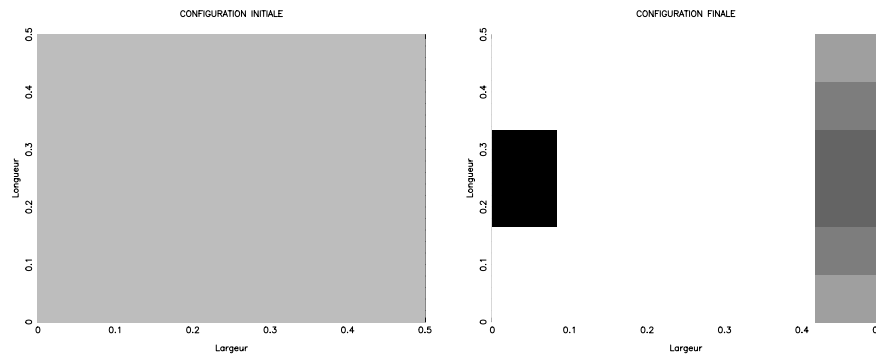


FIGURE 2. Comparaison entre les configurations initiale et finale pour l'optimisation d'une plaque bicouche aluminium-viscoélastique, de caractéristiques suivantes: $longueur = largeur = 50\text{ cm}$, $E_p = 7.2\ 10^{10}\text{ Pa}$, $\nu_p = 0.3$, $\rho_p = 2700\text{ kg/m}^3$, $E_c = 2.4\ 10^7(1 + 0.35i)\text{ Pa}$, $\rho_c = 1200\text{ kg/m}^3$

4.3. POUTRE TRICOUCHE

La poutre étudiée est encore une structure console, avec encastrement sur sa gauche. Seules les épaisseurs des plaques de base et de précontrainte sont optimisées. Les contraintes fixées sont les mêmes que précédemment. La fig 3 permet de comparer les configurations initiale et finale. Le résultat est très différent des deux problèmes précédents, car le processus de dissipation mis en jeu n'est pas le même. A l'encastrement, les épaisseurs de matériau restent importantes toujours pour augmenter la rigidité de la structure et satisfaire la première contrainte. Quant aux fortes épaisseurs

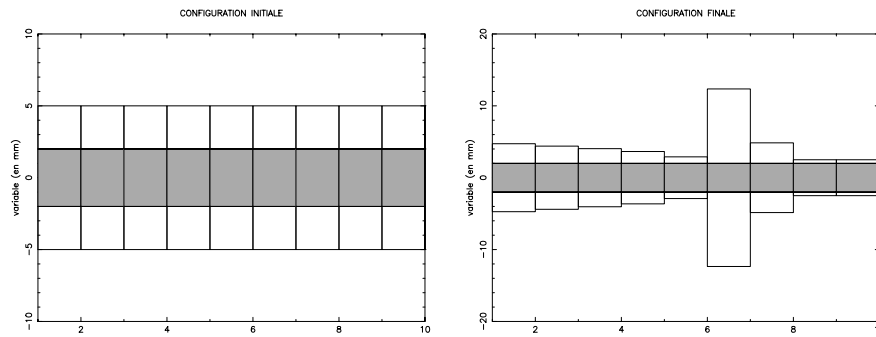


FIGURE 3. Comparaisons entre les configurations initiale et finale pour l'optimisation d'une poutre tricouche aluminium-viscoélastique-aluminium, de caractéristiques suivantes: $longueur = 30\text{ cm}$, $E_1 = E_3 = 7.037 \cdot 10^{10}\text{ Pa}$, $\rho_1 = \rho_3 = 2700\text{ kg/m}^3$, $G_2^* = 0.7037 \cdot 10^9 (1 + 0.3i)\text{ Pa}$, $\rho_2 = 970\text{ kg/m}^3$

situées au milieu de la poutre, elles contribuent à augmenter localement le cisaillement, donc la dissipation d'énergie, par ajout de masse.

5. CONCLUSION

Le but de ce travail était de mieux déterminer où disposer de manière optimale un matériau amortissant. L'objectif était d'obtenir des amortissements doubles de ceux initiaux, pour une masse minimale, et une fréquence fondamentale inchangée. Une condition sine qua non était d'autre part de limiter au maximum les coût calculatoires. Pour résoudre ce problème, une méthode d'optimisation par critère d'optimalité de la masse structurale sous des contraintes de type dynamique a été présentée. Cette méthode a été sélectionnée pour sa vitesse de convergence, indépendante du nombre de variables de conception. Parallèlement, une discrétisation EF, basée sur des modèles simples de plaque et poutres bi ou tricouche a été proposée. Ces modèles à faible nombre de degrés de liberté contribuent à réduire le coût numérique global. Différents cas, faisant intervenir deux types de dissipation différents ont été étudiés. Les résultats des optimisations ont été interprétés, donnant une signification mécanique à un résultat mathématique. Si, dans le cas de la poutre bicouche, le résultat final est conforme à l'intuition, pour la plaque bicouche, et à fortiori pour la poutre tricouche, il eut été difficile de proposer a priori une bonne solution. Ceci permet de justifier l'utilisation de méthodes d'optimisation pour déterminer le meilleur emploi possible de matériaux amortissants, même dans le cas de problèmes apparemment simples.

REFERENCES

- [1] P. G. CIARLET, 'Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation', Edition Masson, 1990
- [2] M. J. YAN, E. H. DOWELL, 'Governing equations for vibrating constrained-layer damping sandwich plates and beams', Journal of Applied Mechanics, pp. 1041-1046 (1972).

- [3] C. FLEURY, '*Structural weight optimization by dual methods of convex programming*', Int. J. num. Meth. Engng., **14**, pp 1761-1783 (1979).
- [4] C. FLEURY, '*An efficient optimality criteria approach to the minimum weight design of elastic structures*', Comput. Struct., **11**, pp 163-173 (1979).
- [5] R. V. GRANDHI, N. S. VENUGOPAL, '*Optimality criteria method for minimum weight design of plate structure*', Proc. AIAA/ASME/ASCE/AHE/ASC 32nd Struc., Structural Dynamics and Materials Conf., Baltimore, pp 213-225 (1991).
- [6] C. T. JAN, K. Z. TRUMAN, '*Optimal design with multiple frequency constraints*', Computer Aided Optimum Design of Structure 91- Optimization of Structural Systems and Industrial Applications, pp 25-38, Computational Mechanics Publications (1991).
- [7] M. R. KHAN, K. D. WILLMERT, '*An efficient optimality criterion method for natural frequency constrained structures*', Comput. Struct., **14**, pp 501-507 (1981).
- [8] N. S. KHOT, L. BERKET and V. B. VENKAYYA, '*Comparison of optimality criteria algorithms for minimum weight design of structures*', Proc. AIAA/ASME 19th Struc., Structural Dynamics and Materials Conf., Bethesda, pp 37-46 (1978).
- [9] F.-T. KO, B. P. WANG, '*An improved method of optimality criteria for structural optimization*', Comput. Struct. **41**, pp 629-636 (1991).
- [10] A. LEISSA, *Vibration of plates*, Edition The Acoustical Society of America.
- [11] M. PAPPAS, '*Improved methods for large scale structural synthesis*', Proc. AIAA/ASME 21st Struc., Structural Dynamics and Materials Conf., Seattle, pp 357-364 (1980).
- [12] W. PRAGER, '*Conditions for structural optimality*'. Comput. Struct., **2**, pp 833-840 (1972).
- [13] E. A. SADEK, '*An optimality criterion method for dynamic optimization of structure*'. Comput. Struct., **28**, pp 579-592 (1989).
- [14] G. SANDER, C. FLEURY, '*A mixed method in structural optimization*', Int. J. num. Meth. Engng., **13**, 385-404 (1978).
- [15] W. SUWECA, L. JEZEQUEL, '*Optimal structural design with damping constraint limitations*', Int. J. num. Meth. Engng., **13**, **35**, pp. 21-35 (1992)
- [16] K. Z. TRUMAN, F. Y. CHENG, '*Optimality criterion algorithm for mixed steel and reinforced concrete seismic*', Computer Aided Optimum Design of Structure 91- Optimization of Structural Systems and Industrial Applications, pp 209-220, Computational Mechanics Publications (1991).
- [17] V. B. VENKAYYA '*Structural Optimization: a review and some recommendations*', Int. J. num. Meth. Engng., **13**, pp 203-228 (1978)