

PROPAGATION DANS LES ESPACES DE DIMENSIONS PAIRES

JEAN HARDY, CLAUDE DEPOLLIER ET ROZENN NICOL

RÉSUMÉ. On démontre une relation de récurrence reliant les fonctions de Green de la propagation libre entre les espaces dont les dimensions diffèrent de deux. Une relation reliant les dimensions différant de un fait naturellement apparaître un opérateur fractionnaire pour le cas des dimensions paires. On montre qu'un être sensible uniquement à l'ouïe peut différencier les espaces pairs et impairs. Une démonstration sera faite en écoutant des signaux convolués avec les fonctions de Green jusqu'à la dimension cinq.

ABSTRACT. In this paper a recurrence relation is found for the Green functions of the equation of propagation in free spaces when the difference between their dimensions is equal to two. In the case where the difference is equal to one, the relation uses a fractional differential operator. It is shown that if we are responsive only to sounds, we can differentiate the odd and even spaces. A realistic experiment for recordings convoluted with Green functions up to dimension five will be performed at the conference.

1. INTRODUCTION

Bien que les outils mathématiques du calcul fractionnaire aient été depuis longtemps développés, les exemples d'utilisation en physique ne sont pas souvent rencontrés. Non pas que les applications potentielles soient rares, mais peut-être vivons nous encore sous l'influence des méthodes du calcul différentiel découvertes au XVIII^{ème} siècle. Les équations classiques expriment pour la plupart des propriétés de continuité un peu à la manière du développement de Taylor, ce qui fait apparaître naturellement des dérivations d'ordre entier. De plus, on peut remarquer le caractère local de ces équations, ce qui est nécessairement un peu réducteur. Les méthodes du calcul fractionnaire font intervenir les propriétés de voisinage des fonctions et présentent par conséquent un caractère plus général que les dérivations entières.

L'exemple que nous présentons dans ce papier concerne les équations de propagation dans les espaces de dimension paire. L'idée d'utiliser la dérivation fractionnaire dans l'étude de l'équation de propagation vient de la lecture d'un article de Riesz [7] dans lequel il définit les dérivées non entières à l'aide de l'intégrale de Riemann-Liouville. Il y explique pourquoi les dérivations entières exprimées dans cette intégrale conduisent à un caractère local ; il écrit notamment : "Voilà en germe le principe d'Huygens". Or il est connu depuis longtemps que le principe d'Huygens n'est valable qu'en dimension 3 [3, 2, 5], d'où l'idée que peut être les autres dimensions pourraient conduire à utiliser des dérivées d'ordre fractionnaire.

Dans une première partie, on rappelle la solution de l'équation de propagation en dimension trois. Dans une deuxième partie, on établit les relations reliant les fonctions de Green dans des espaces dont la dimension diffère de deux ou de un,

© Société de Mathématiques Appliquées et Industrielles. Typeset by L^AT_EX.

J. Hardy, C. Depollier : LAUM, UMR-CNRS 6613, IAM, avenue O. Messiaen, 72085 Le Mans cedex 9, France. E-mail : hardy@musix.univ-lemans.fr, depol@musix.univ-lemans.fr.

R. Nicol : CNET DIH/DIPS 2, avenue P. Marzin 22307 Lannion cedex, France.

par la méthode dite de la descente, une réflexion sur la pertinence de la méthode est faite à cette occasion. Une troisième partie traite des sources dont l'étendue est non négligeable pour un développement multipolaire. Enfin une conclusion mettra en évidence les répercussions pour la physique des particularités de la propagation des ondes dans les espaces de dimensions paires.

2. PROPAGATION DES ONDES EN DIMENSION 3

Dans l'espace \mathbb{R}^N , l'équation de propagation (ou encore l'équation des ondes) est l'équation aux dérivées partielles dont la forme générale est

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \varphi(\vec{r}^\rightarrow, t) = q(\vec{r}^\rightarrow, t) \quad (2.1)$$

où Δ représente l'opérateur Laplacien dans cet espace, c a la dimension d'une vitesse. Le temps $t = 0$ est pris comme instant initial. La fonction $\varphi(\vec{r}^\rightarrow, t)$ désigne la grandeur qui se propage au point \vec{r}^\rightarrow et à l'instant t et la fonction $q(\vec{r}^\rightarrow, t)$ est le terme de sources et constitue la donnée du problème.

La solution du problème précédent est obtenue – dès que sa fonction de Green g_N est connue – par convolution avec le terme de source [8] :

$$\varphi(\vec{r}^\rightarrow, t) = \int q(\vec{r}'^\rightarrow, t') g_N(\|\vec{r}^\rightarrow - \vec{r}'^\rightarrow\|, t - t') dt d\vec{r}'^\rightarrow.$$

Dans cette équation on a tenu compte de la symétrie du problème, ce qui implique que la fonction de Green ne dépend que de la distance source-récepteur R et de la différence de temps entre événement et écoute t ; ainsi la fonction de Green g_N obéit à l'équation :

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{c^2}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial}{\partial R}\right)\right] g_N(R, t) = \delta(R) \cdot \delta(t) \quad (2.2)$$

à laquelle on associe les conditions initiales nulles et les conditions de Sommerfeld à l'infini.

2.1. CALCUL DE LA FONCTION DE GREEN POUR $N = 3$

L'équation en dimension 3 se résout par la méthode de la transformée de Fourier. Dans cette approche, on exprime la fonction de Green sous la forme d'une intégrale de Fourier [4] :

$$g_3(R, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} G_3(K, \omega) e^{j\omega t} e^{jKR} d\omega dK. \quad (2.3)$$

Cette écriture s'identifie à un développement sur la base des fonctions propres des opérateurs Δ et $\partial^2/\partial t^2$ intervenant dans l'équation des ondes. De la même façon, le second membre de l'équation (2.2) peut s'écrire :

$$\delta(R)\delta(t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega t} e^{jKR} d\omega dK. \quad (2.4)$$

Le report de ces expressions dans l'équation (2.2) conduit à une équation algébrique dont G_3 est solution :

$$G_3(K, \omega) = \frac{1}{K^2 c^2 - \omega^2}, \quad (2.5)$$

La fonction de Green g_3 s'en déduit par la relation (2.3).

$$g_3(R, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{j\omega t} e^{jKR}}{K^2 c^2 - \omega^2} d\omega dK. \quad (2.6)$$

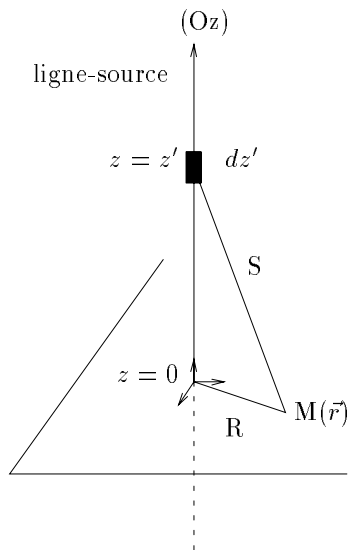


FIG. 1 - Calcul de g_2 à partir g_3

Ce calcul de l'intégrale se fait par la méthode des résidus. On trouve alors

$$g_3(R, t) = \frac{\delta(t - \frac{R}{c})}{4\pi c^2 R}. \tag{2.7}$$

2.2. MÉTHODE DE DESCENTE

Pour des dimensions différentes de trois il est préférable d'utiliser la méthode de la descente que nous allons décrire brièvement.

2.2.1. DE 3-D VERS 2-D. La méthode de descente est basée sur l'équivalence suivante: dans un espace de dimension 3, une ligne-source infinie, parallèle à l'axe (\vec{Oz}) , est analogue à une source ponctuelle en dimension 2.

Par suite, la fonction de Green en dimension 2 correspond au champ induit par une ligne-source impulsionnelle en 3-D et s'obtient en intégrant le champ correspondant à la fonction g_3 sur la ligne-source (cf, Fig. 1). Le champ total est alors donné par la relation

$$g_2(R, t) = \int_{Oz} \frac{\delta(t - \frac{S}{c})}{4\pi c^2 S} dz, \tag{2.8}$$

où $S^2 = R^2 + z^2$ et :

$$g_2(R, t) = \frac{1}{2\pi c^2} \int_R^\infty \frac{\delta(t - \frac{S}{c})}{\sqrt{S^2 - R^2}} dS \tag{2.9}$$

L'expression de la fonction de Green de l'équation de propagation en dimension 2 est alors :

$$g_2(R, t) = \frac{H(t - \frac{R}{c})}{2\pi c^2 \sqrt{t^2 - \frac{R^2}{c^2}}} \tag{2.10}$$

où H est la fonction de Heaviside. On vérifie immédiatement que cette fonction correspond bien à la solution de l'équation de Green en dimension 2.

Toutefois, l'interprétation physique de ce résultat soulève plusieurs problèmes liés d'une part à la nature infinie du support de la fonction g_2 et d'autre part à la

valeur infinie de son amplitude en $t = r/c$. En effet, que peut-on dire de la vitesse de propagation de l'énergie des ondes en dimension 2? Comme on peut le remarquer, c est la célérité du "front d'onde", mais à l'arrière de ce front d'onde, l'énergie ne se déplace pas à cette vitesse; une partie de cette énergie reste même au voisinage de la source. Tout se passe donc comme si c était une valeur maximale pour la célérité et comme si l'énergie se propageait à toutes les vitesses comprises dans l'intervalle $[0, c]$. Il en résulte un effet de traînage (qui donne lieu, pour les ondes acoustiques, à un phénomène de même type que la réverbération dans un espace confiné) qu'on retrouve dans la réponse impulsionnelle des systèmes décrits par des équations différentielles comportant des dérivées fractionnaires.

Lorsqu'on considère la solution de l'équation d'onde sous la forme de la convolution de g_2 avec la fonction source placée à l'origine des coordonnées :

$$\begin{aligned} p_2(R, t) &= \frac{1}{2\pi c^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{H(t-t' - \frac{R}{c}) q(t')}{\sqrt{(t-t')^2 - \frac{R^2}{c^2}}} dt' \\ &= \frac{1}{2\pi c^2} \int_{-\infty}^{t - \frac{R}{c}} \frac{q(t')}{\sqrt{(t-t')^2 - \frac{R^2}{c^2}}} dt'. \end{aligned} \quad (2.11)$$

On peut signaler une analogie avec les définitions des dérivations fractionnaires. En effet, dans l'expression de p_2 , la contribution majeure à l'intégrale provient des points situés au voisinage du pôle ($t' = t - \frac{r}{c}$) de l'intégrand. Il est alors légitime de remplacer le terme $(t-t')^2 - (\frac{R}{c})^2$ par son développement au voisinage de ce pôle [1] :

$$(t-t')^2 - (\frac{R}{c})^2 \simeq 2\frac{R}{c}(t-t' - \frac{R}{c}) + \dots$$

On trouve alors :

$$p_2(R, t) \simeq \frac{1}{2\pi\sqrt{2\frac{R}{c}}} \int_{-\infty}^{t - \frac{R}{c}} \frac{q(t')}{\sqrt{t - \frac{R}{c} - t'}} dt' = \frac{1}{2\sqrt{2\pi\frac{R}{c}}} [I^{-1/2}q](t - \frac{R}{c}). \quad (2.12)$$

A un coefficient près, p_2 s'obtient comme la dérivée d'ordre $-1/2$ du signal émis par la source [6] (en fait $[I^{-1/2}q](t - \frac{r}{c})$), où I^α est définie par :

$$[I^\alpha f](x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x f(t)(x-t)^{\alpha-1} dt. \quad (2.13)$$

Dans le cas où α est négatif, cette intégrale doit s'entendre au sens des parties finies de Hadamard [8], ou se généraliser par un prolongement analytique. Le coefficient $1/\Gamma(\alpha)$ est important car il permet l'égalité

$$[I^\alpha [I^\beta f]] = [I^{\alpha+\beta} f],$$

de plus, c'est ce terme qui rend *locale* la dérivation *entière*.

2.2.2. DE 3-D VERS 1-D. En procédant de manière analogue, la fonction de Green en dimension 1 se calcule donc en considérant le champ créé par un plan-source d'équation $x = 0$ de l'espace de dimension 3 (cf. Fig. 2) ; dans ce cas, la fonction g_1 est donnée par la relation suivante :

$$g_1(R, t) = \int_{x=R}^{+\infty} g_3(S, t) dy dz = 2\pi \int_{T=0}^{\infty} g_3(S, t) T dT.$$

avec $S^2 = R^2 + y^2 + z^2 = R^2 + T^2$ et donc $S dS = T dT$, ce qui donne enfin :

$$g_1(R, t) = \int_R^{\infty} g_3(S, t) S dS.$$

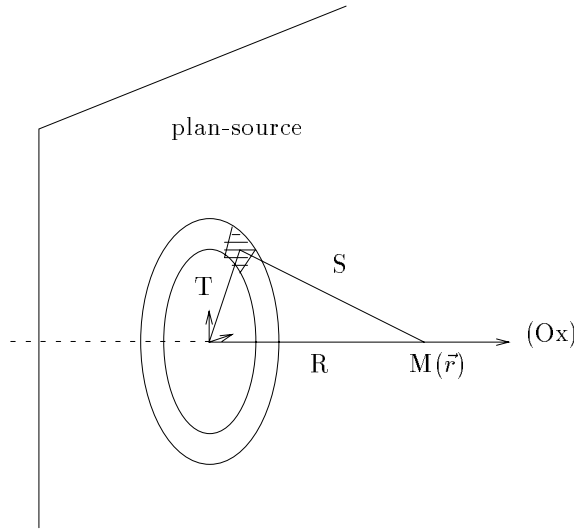


FIG. 2 - Calcul de g_1 à partir g_3

2.3. FORMULES D'ITÉRATION

L'approche précédente se généralise à un espace de dimension N quelconque. La fonction de Green g_N ne dépend fondamentalement que de la distance entre la source et l'auditeur R , ainsi que de l'intervalle de temps entre l'émission et la réception t . On note (x_1, \dots, x_N) les coordonnées cartésiennes d'un point de l'espace. Par un raisonnement analogue à celui mené en dimension deux, la fonction g_{N-1} se déduit de g_N en considérant que le champ induit par un point-source en dimension $N-1$ correspond au champ induit par une ligne-source en dimension N . Il suffit d'intégrer g_N le long de l'axe Ox_N :

$$g_{N-1}(R, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_N(S, \tau) dx_N, \tag{2.14}$$

$$\text{avec } R = \sqrt{\sum_{i=1}^{N-1} (x_i)^2} \text{ et } S^2 = R^2 + x_N^2.$$

On obtient ainsi la première relation d'itération entre les fonctions de Green g_N et g_{N-1} sous la forme :

$$g_{N-1}(R, t) = 2 \int_R^{+\infty} \frac{S}{\sqrt{S^2 - R^2}} g_N(S, t) dS. \tag{2.15}$$

La seconde relation d'itération est obtenue en considérant le champ induit par un point-source en dimension $N-2$ correspondant au champ induit par un plan-source en dimension N , soit :

$$g_{N-2}(R, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g_N(S, t) dx_{N-1} dx_N. \tag{2.16}$$

où $S^2 = R^2 + x_N^2 + x_{N-1}^2 = R^2 + T^2$; on a alors $S dS = T dT$. En intégrant sur la couronne de rayon S (cf. Fig. 2), on trouve :

$$g_{N-2}(R, t) = 2\pi \int_0^\infty g_N(S, T) T dT = 2\pi \int_R^\infty g_N(S, t) S dS. \tag{2.17}$$

Cette relation peut s'inverser pour donner :

$$g_N = \left[-\frac{1}{2\pi R} \frac{\partial}{\partial R} \right] g_{N-2}. \quad (2.18)$$

Evidemment, l'opérateur qui permet de passer de N à $N-1$ est l'inverse de la racine carrée de cet opérateur ; de la même façon que l'on généralise la dérivation à des ordres non entiers. Grâce à ces formules d'itération, la fonction de Green associée à n'importe quelle dimension se déduit de g_3 par un calcul simple. La fonction g_2 a déjà été calculée par cette méthode (cf. (2.10)), la fonction g_1 s'obtient de la même façon en appliquant la relation (2.17) :

$$g_1(R, t) = \frac{1}{2} \int_R^\infty \delta\left(t - \frac{S}{c}\right) dS = \frac{1}{2c} H\left(t - \frac{R}{c}\right). \quad (2.19)$$

Pour les espaces de dimension supérieure à trois, la formule (2.18) itérée autant de fois qu'il est nécessaire, permet d'exprimer les fonctions de Green dans les espaces de dimension paire et impaire, à partir de g_2 et de g_3 . Compte tenu des expressions de g_2 et g_3 les fonctions d'ordre pair contiendront un terme de traînage de la forme :

$$\frac{H\left(t - \frac{R}{c}\right)}{\left(t^2 - \frac{R^2}{c^2}\right)^{\frac{N-1}{2}}}$$

(à un facteur près), ainsi que des combinaisons de fonctions $\delta\left(t - \frac{R}{c}\right)$ et de leur dérivées, alors que pour les dimensions impaires on ne constate que des combinaisons de $\delta\left(t - \frac{R}{c}\right)$ et de leurs dérivées. Ceci révèle une différence *radicale* de comportement entre les espaces de dimension paire et impaire. On constate que les champs rayonnés dans les espaces de dimension paire $N = 2m$ se déduisent du signal émis par la source en dimension 3 par une dérivation d'ordre $m - 3/2$ alors que dans le cas des espaces de dimension impaire, l'ordre de la dérivation est entier. Il en découle qu'au cours de la propagation dans les espaces de dimension paire, le signal se déforme et cela d'autant plus que la dimension de l'espace est élevée.

La procédure utilisée pour le calcul des fonctions de Green de l'équation des ondes dans les espaces \mathbb{R}^N , conduit à quelques remarques.

REMARQUE 2.1. La méthode de descente implique une source d'extension infinie dans une direction, ce qui est contraire aux hypothèses de départ exprimées par la condition de Sommerfeld. Une difficulté analogue existe en hydrodynamique pour le calcul de la force exercée sur un cylindre par un fluide visqueux en écoulement.

REMARQUE 2.2. Les particularités de la propagation en fonction de la dimension de l'espace ne sont pas faciles à mettre en évidence de façon pratique ; en effet les signaux du genre trains d'ondes donnent par dérivation ou intégration des signaux du même genre. Ainsi des ondes progressives en dimension deux donnent des signaux comme :

$$Ae^{-i\omega t} H_0^{(1)}(kR)$$

qui conduisent aux grandes distances à une formule asymptotique en :

$$\frac{e^{i(kR - \omega t - \frac{\pi}{4})}}{\sqrt{kR}}$$

qui n'est pas franchement différente du comportement en dimension trois. Les différences interviennent donc plus spécialement quand les signaux sont de nature impulsionnelle.

3. SOURCE ÉTENDUE : DÉVELOPPEMENT MULTIPOLAIRE

Lorsque la source $q(\vec{r}^\rightarrow, t)$ est étendue, et que l'observateur est situé à une distance grande par rapport aux dimensions de la source ($\|\vec{r}^\rightarrow_0\| \ll \|\vec{r}^\rightarrow\|$), le champ

rayonné :

$$p(\vec{r}^\rightarrow, t) = \int q(\vec{r}^\rightarrow, t') g_N(\vec{r}^\rightarrow - \vec{r}^\rightarrow, t - t') d\vec{r}^\rightarrow dt', \quad (3.1)$$

se développe en série de termes correspondant aux rayonnements des multipôles qui constituent cette source. On trouve alors l'expression du champ sous la forme :

$$p(\vec{r}^\rightarrow, t) = \int q(\vec{r}^\rightarrow, t') \exp(-\vec{r}^\rightarrow \cdot \vec{\nabla}_r^\rightarrow) g_N(\|\vec{r}^\rightarrow\|, t - t') d\vec{r}^\rightarrow dt'. \quad (3.2)$$

Sachant les fonctions de Green sont des fonctions radiales, on a :

$$\vec{\nabla}_r^\rightarrow g_N(\|\vec{r}^\rightarrow\|, t - t') = \frac{\vec{r}^\rightarrow}{\|\vec{r}^\rightarrow\|} \frac{\partial}{\partial r} g_N(\|\vec{r}^\rightarrow\|, t - t').$$

En reportant l'expression de g_{N+2} en fonction de g_N , on trouve :

$$\vec{\nabla}_r^\rightarrow g_N(\|\vec{r}^\rightarrow\|, t - t') = -2\pi \vec{r}^\rightarrow g_{N+2}(\|\vec{r}^\rightarrow\|, t - t'),$$

en itérant, on obtient l'expression du champ suivante :

$$p(\vec{r}^\rightarrow, t) = \int \sum_{i=0}^{\infty} S_i \left(\frac{\vec{r}^\rightarrow}{\|\vec{r}^\rightarrow\|}, t' \right) g_{N+2i}(\|\vec{r}^\rightarrow\|, t - t') dt', \quad (3.3)$$

où les coefficients S_i sont les termes de sources multipolaires.

Dans le cas d'une source étendue, pour un observateur éloigné, tout se passe comme si le rayonnement multipolaire perçu correspondait à une superposition de champs monopolaires dans des espaces de dimensions supérieures de même parité.

4. CONCLUSION

La propagation dans un espace de dimension 3 revêt un caractère spécifique puisqu'un signal s'y propage sans se déformer. A l'inverse les espaces de dimension paire produisent une forte distortion des signaux sous la forme d'un trainage. Le formalisme de la dérivation fractionnaire et les propriétés de non localité qu'il implique sont des outils bien adaptés pour ce type d'étude.

Il est concevable que, du point de vue du sens de l'ouïe, un auditeur ne ressentirait une différence qu'entre les espaces de dimensions de parités différentes, car une source monopolaire de dimension $N+2$ est ressentie comme un dipôle en dimension N . A l'occasion de la conférence une démonstration auditive sera faite, permettant aux participants de se faire une idée par eux-mêmes.

RÉFÉRENCES

- [1] Y. H. Berthelot, *Half-order derivative formulation for the analysis of laser-generated Rayleigh waves*, *Ultrasonics*, **32**, pp. 153-154, 1994.
- [2] R. Courant and D. Hilbert, *Methods of mathematical physics*, Vol 2, Wiley Classics, New York, 1989.
- [3] J. Hadamard, *Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques*, Hermann, Paris, 1932.
- [4] R. Howe, E.C. Tan, *Non-abelian harmonic analysis*, Springer Verlag.
- [5] M. Jessel, *Acoustique théorique et holophonie*, Masson, Paris 1973.
- [6] K. B. Oldham and J. Spanier, *The fractional calculus: theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order*, Academic Press, New York & London, 1974.
- [7] M. Riesz, *L'intégrale de Liouville et le problème de Cauchy*, *Acta. Math.* **81** 1-223, 1949.
- [8] L. Schwartz, *Théorie des distributions*, Hermann, 1966. pages 50 et 178.

