

COMMANDE DIFFUSIVE D'UNE MACHINE ÉLECTRIQUE: UNE INTRODUCTION

PIERRE BIDAN

ABSTRACT. We present, on the example of control of a DC motor, a new method for designing robust control laws, based on the approach described in [8]. This method consists in improving the performances of a pre-defined classical control by adding an optimized "diffusive transfer" into the loop. The aim is not to develop this method in a general way, but rather to highlight the principle on a simple case, the optimal diffusive controller of which is of fractional type.

RÉSUMÉ. On propose, sur l'exemple particulier d'un variateur de vitesse à moteur à courant continu, une voie nouvelle de synthèse de commande robuste, basée sur une approche décrite dans [8]. De manière très schématique, la méthode consiste, à partir d'une loi de commande traditionnelle, d'améliorer cette dernière par l'adjonction d'un "transfert diffusif" optimisé. L'objectif de la communication n'est pas de développer cette méthode dans toute sa généralité, mais plutôt d'en présenter la démarche et certains aspects fondamentaux sur un cas simple pour lequel le correcteur diffusif optimal est de type fractionnaire.

1. INTRODUCTION

Le domaine du génie électrique qui traite des convertisseurs d'énergie et de leur utilisation a toujours constitué un domaine d'application privilégié pour les méthodes de contrôle proposées par l'automatique [4]. Qu'il s'agisse de convertisseurs statiques, tel que les alimentations à découpage, ou encore électromécaniques, comme les machines électriques utilisées dans divers dispositifs d'entraînement, les modèles du processus à commander sont bien établis et l'élaboration de structures de commande doit, dans la majorité des cas, intégrer des critères de robustesse des performances vis à vis de variations de paramètres.

Nous proposons ici, sur l'exemple particulier d'un variateur de vitesse à moteur à courant continu (MCC), une voie nouvelle de synthèse de commande robuste, proposée par G. Montseny, J. Audounet et J. Bernussou dans [8]. De manière très schématique, la méthode consiste, à partir d'une loi de commande traditionnelle, éventuellement élaborée en prenant déjà en compte des impératifs de robustesse, de tenter d'améliorer encore cette dernière par l'adjonction d'un "transfert diffusif" optimisé. L'objectif de la communication n'est pas de développer cette méthode dans toute sa généralité, mais plutôt d'en présenter la démarche et certains aspects fondamentaux sur un cas simple pour lequel le correcteur diffusif optimal est de type fractionnaire.

A ce titre, ce correcteur peut être rapproché, dans ses caractéristiques, des contrôleurs bien connus développés dans [11], [2]. Néanmoins, la démarche en est différente, dans la mesure où, d'une part, l'objectif de robustesse peut être exprimé sous la forme d'un problème standard, d'autre part l'optimisation porte sur

© Société de Mathématiques Appliquées et Industrielles. Typeset by L^AT_EX.

P. Bidan: Laboratoire de Génie Electrique - Université Paul Sabatier, 118, route de Narbonne, 31062 Toulouse cedex, France. Email: bidan@lget.ups-tlse.fr.

une classe étendue de contrôleurs ayant une structure d'espace vectoriel, contrairement aux opérateurs fractionnaires. Cette classe, bien adaptée à l'optimisation numérique (et qui contient tous les opérateurs fractionnaires), est étudiée dans [10]. Ainsi, dans le cas présent, la position du problème de contrôle correspondant s'exprime concrètement sous forme d'optimisation par rapport à un vecteur de \mathbf{R}^n , sans qu'aucune référence a priori à un correcteur de type fractionnaire ne soit nécessaire, de tels contrôleurs pouvant être obtenus *a posteriori* comme solutions optimales, construites par voie numérique.

Dans le cas particulier considéré ici, il est mis en évidence que les contrôleurs fractionnaires jouent un rôle central vis à vis d'une fonctionnelle particulière, construite à partir de propriétés d'invariance d'une équation différentielle fractionnaire. Bien évidemment ceci ne peut être étendu au cas général que dans le cadre introduit dans [10], la nature spécifiquement fractionnaire étant directement liée à la forme simplifiée du modèle considéré, bien adapté à un grand nombre de problèmes de commande dans le domaine des convertisseurs d'énergie électrique.

L'article est organisé en trois parties. Dans un premier temps, on présente le problème de la commande d'un variateur de vitesse dans un contexte simplifié. On construit sur la base de ce modèle, une commande classique linéaire de type PI, ainsi qu'une commande basée sur un compensateur fractionnaire. Ensuite, on présente de façon simplifiée, la problématique du "contrôle diffusif", introduit dans [8]. Enfin, on applique cette approche au problème de commande du régulateurs de vitesse précédemment introduit, afin d'illustrer la pertinence de l'approche diffusive dans un cadre étendu incluant les compensateurs fractionnaires.

2. DESCRIPTION ET COMMANDE D'UN VARIATEUR DE VITESSE

Les variateurs de vitesse électriques sont utilisés dans de nombreux dispositifs technologiques pour assurer différentes fonctions : traction, levage, dérouleur-enrouleur, pompage, etc. La structure de base de ces variateurs associés à leur commande est représentée sur la figure 1, dans le cas où la machine électrique est à courant continu et à aimants permanents. Il ne s'agit pas, bien sûr, du seul type de machine employé, mais c'est celui qui permet de simplifier la maîtrise du couple mécanique qu'elle produit, contrairement aux machines à courants alternatifs, synchrone ou asynchrone, qui nécessitent un dispositif, dit "d'autopilotage", pour contrôler cette variable et dont la description déborderait le cadre de cet article. La tension réglable u délivrée par l'alimentation (constituée par un hacheur 2 ou 4 quadrants) permet d'agir sur le courant i dans l'induit de la machine et par voie de conséquence sur le couple C qu'elle produit sur son axe, afin d'entraîner une charge mécanique variable.

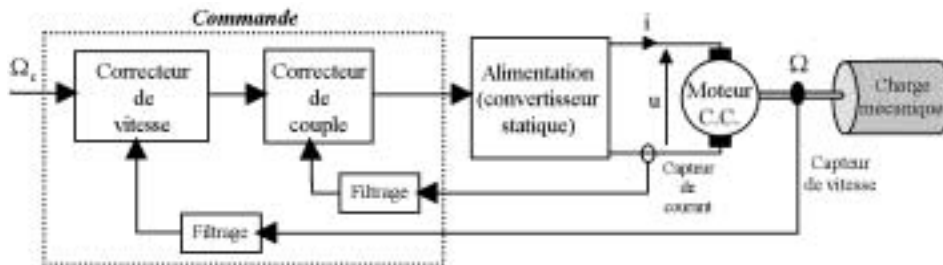


FIGURE 1. Architecture d'un variateur de vitesse

L'objectif principal de la commande est d'assurer que la vitesse de rotation Ω de l'axe de la machine suive une vitesse de consigne (ou de référence) Ω_c , éventuellement variable : il s'agit donc d'un asservissement de vitesse dans lequel se posent des problèmes de poursuite (suivi de la consigne) et de régulation (rejet de perturbations sur le couple de charge).

2.1. MODÈLE DU PROCESSUS À COMMANDER

Le schéma fonctionnel de la figure 2 permet de rappeler le modèle couramment utilisé, sous forme symbolique : p est la variable de Laplace, $\tau_e = \frac{L}{r}$ la constante de temps électrique de la machine (L inductance et r résistance de l'induit), la force électromotrice, J le moment d'inertie de l'ensemble machine + charge, k_c la constante de couple et C_s un couple perturbateur. Il s'agit d'un modèle linéaire, mais dans lequel l'inertie J peut varier. La dynamique propre de l'alimentation n'est pas décrite à ce stade, mais à été prise en compte au niveau de la synthèse des correcteurs et de la simulation du système. Il est intéressant de noter que, pour une machine à aimants permanents, le couple est directement proportionnel au courant traversant le moteur. On notera la présence d'une boucle de contre-réaction intrinsèque au fonctionnement de cette machine due à la force électromotrice e_m .

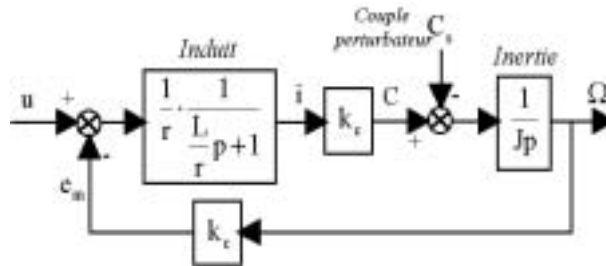


FIGURE 2. Modèle du processus

2.2. STRUCTURE ET RÉGLAGE D'UN CONTRÔLEUR TRADITIONNEL

Comme le rappelle la figure 1, la structure très largement employée pour le contrôleur est constituée de deux boucles imbriquées et correspond à une structure particulière de retour d'état. La première, rapide, est une boucle interne de courant (cf. fig. 3) qui permet de contrôler le couple et de rejeter l'influence de la force électromotrice. En négligeant la présence du filtre employé sur la mesure du courant, l'induit de la machine a un comportement dominant du premier ordre et le type de correcteur employé est généralement du type "proportionnel-intégral" (P.I.). Cependant, un simple gain proportionnel est retenu pour la suite, car il assure dans la plupart des cas un gain de boucle suffisamment élevé, garant d'une précision statique satisfaisante. Le choix de ce gain prend en compte les limitations propres à l'alimentation.

La boucle externe de vitesse, "plus lente", utilise un correcteur P.I. (cf. fig. 4). Le terme intégral, placé en amont de la perturbation de couple dans la chaîne directe, garanti en effet une précision statique satisfaisante en régulation (rejet des perturbations de couple). L'utilisation d'un étage de filtrage de la consigne n'est pas envisagé dans cet exemple, et le capteur de vitesse est supposé idéal.

La détermination des paramètres du correcteur de vitesse est réalisée, soit par référence à un système du 2ème ordre (choix de la pulsation propre ω_n et du coefficient d'amortissement ζ), en négligeant l'influence de la boucle interne de courant ($i = i_c$) et du filtre sur le capteur de vitesse, soit en effectuant un placement de

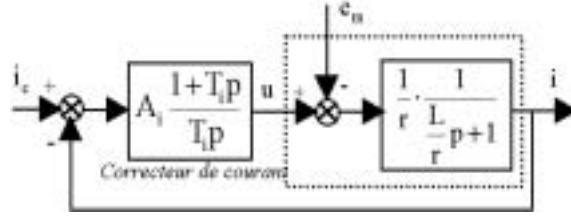


FIGURE 3. Boucle de courant

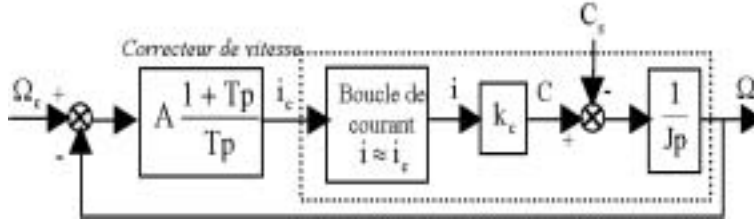


FIGURE 4. Boucle de vitesse traditionnelle

pôles "au mieux", en prenant en compte l'ensemble des dynamiques. Si, en première approche, la première méthode simplifiée est retenue, la fonction de transfert de poursuite s'écrit :

$$H(p) = \frac{\Omega(p)}{\Omega_c(p)} \Big|_{C_s=0} = \frac{1+T_p}{1+T_p + \frac{J}{A \cdot k_c} p^2} = \frac{1+T_p}{1 + \frac{2\zeta}{\omega_n} p + \frac{p^2}{\omega_n^2}}, \quad (2.1)$$

avec $\omega_n = \sqrt{\frac{A k_c}{J T}}$ et $\zeta = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{A k_c T}{J}}$.

La fonction de transfert de régulation est quant à elle :

$$R(p) = \frac{\Omega(p)}{C_s(p)} \Big|_{\Omega_c=0} = -\frac{T}{A k_c} \frac{p}{1 + T p + \frac{J}{A \cdot k_c} p^2} = -\frac{T}{A k_c} \frac{p}{1 + \frac{2\zeta}{\omega_n} p + \frac{p^2}{\omega_n^2}}. \quad (2.2)$$

Notons que $R(0) = 0$, ce qui garantit bien le rejet d'une perturbation constante en régime statique.

Il convient de remarquer que le coefficient d'amortissement ζ est d'autant plus faible (et la stabilité d'autant plus fragile) que le moment d'inertie est grand: la valeur maximale J_{\max} de ce paramètre constitue donc le pire des cas pour la commande traditionnelle sur le plan de la stabilité. Pour J_{\max} , le réglage du correcteur de vitesse retenu correspond à un temps de réponse de la boucle de vitesse 6 fois plus grand que celui de la boucle de courant avec un coefficient d'amortissement de 0.7. La figure 5 rassemble des résultats de simulation pour différentes valeurs de J (de la marche à vide à la charge mécanique maximale). Les conditions de fonctionnement ont été choisies pour demeurer dans un cadre quasi-linéaire (pas de saturation de l'alimentation ni de limitation en courant). La première partie des réponses correspond à un test de poursuite (réponse indicielle), la seconde à un test en régulation (réponse à une perturbation de couple en échelon pour une consigne constante). En poursuite, la réponse est d'autant plus rapide que le moment d'inertie est faible, avec l'apparition d'oscillations induites par l'interférence entre les boucles interne et externe qui ne sont plus suffisamment découplées.

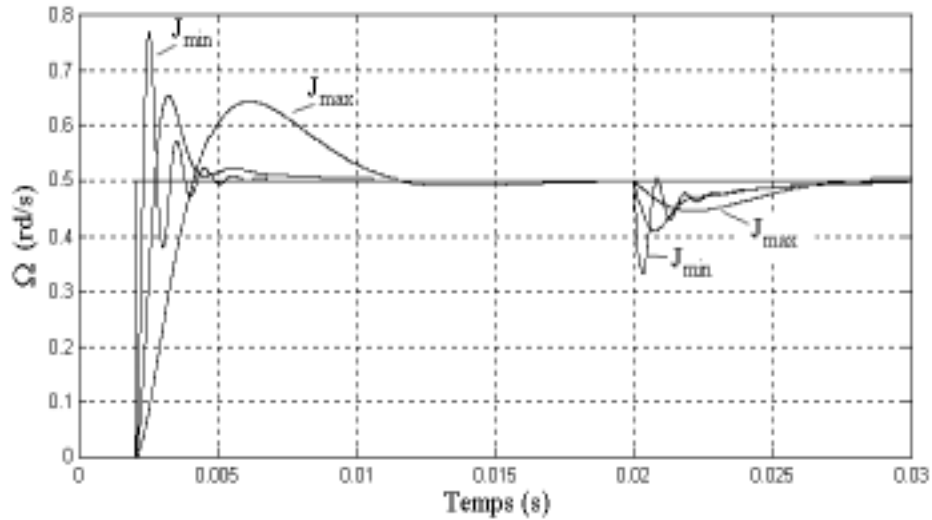


FIGURE 5. Réponse du variateur avec commande traditionnelle

2.3. CONSTRUCTION D'UN CORRECTEUR FRACTIONNAIRE

La mise en œuvre de correcteurs fractionnaires est devenue classique, suite aux nombreux travaux dans ce domaine au cours des dernières années ([2], [7], [8], [9], [11]...). Le but de ce paragraphe est de mettre simplement en évidence sur le cas concret considéré ici, l'intérêt de contrôleurs non standards (ici fractionnaires) vis à vis des propriétés de robustesse¹ par rapport à J .

L'asservissement conserve la boucle interne de courant, seul le correcteur de la boucle de vitesse est modifié comme proposé sur la figure 6.

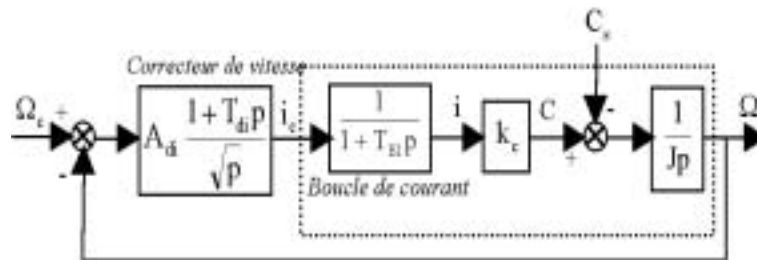


FIGURE 6. Boucle de vitesse "fractionnaire"

En prenant $T_{di} = T_{BI}$, où T_{BI} est la constante de temps de la boucle de courant, la fonction de transfert de la chaîne directe corrigée en l'absence de perturbation s'écrit:

$$G_{vc}(p) = \frac{A_{di}k_c}{Jp^{1+\alpha}}, \quad 0 < \alpha < 1, \tag{2.3}$$

qui donne la fonction de transfert de poursuite en boucle fermée:

$$H_{di}(p) = \frac{1}{\frac{J}{A_{di}k_c}p^{1+\alpha} + 1}; \tag{2.4}$$

¹Ces propriétés sont largement utilisées dans [11].

la fonction de transfert de régulation est:

$$R_{di}(p) = -\frac{1}{A_{di}k_c} \frac{p^\alpha}{\frac{J}{A_{di}k_c} p^{1+\alpha} + 1}. \quad (2.5)$$

A noter que $R_{di}(0) = 0$, ce qui garantit bien le rejet d'une perturbation constante en régime statique.

Les choix de l'ordre d'intégration fractionnaire (1/2) du correcteur et de la valeur nominale du gain A_{DI} sont tels que la réponse indicielle en poursuite est très proche de celle avec correcteur traditionnel pour $J = J_{\max}$ (cf. fig. 8). La réponse fréquentielle approchée de $\frac{A_{di}}{\sqrt{p}}$ employée en simulation² est représentée sur la figure 7.

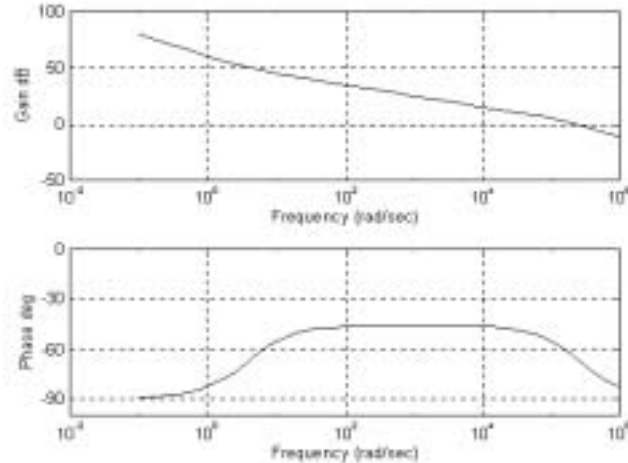


FIGURE 7. Approximation du compensateur fractionnaire

La figure 9 rassemble des résultats de simulation établis dans les mêmes conditions que la commande traditionnelle. La réponse en poursuite conserve à présent, à un changement d'échelle de temps près, exactement la même forme quelque soit le moment d'inertie, contrairement au cas de la commande traditionnelle. Le rejet de perturbation, bien que meilleur dans la partie transitoire (moins d'oscillations), laisse néanmoins apparaître un certain traînage, dont l'origine est à mettre sur le compte de l'intégrateur d'ordre 1/2 qui agit plus "lentement" qu'un intégrateur d'ordre 1 (phénomène de mémoire longue).

3. PRINCIPE DU CONTROLE DIFFUSIF ROBUSTE

On résume ici l'approche introduite dans le cas général dans [8]. On se restreint au cadre défini par la propriété d'invariance par changement d'échelle de temps (ou de fréquence) des équations différentielles fractionnaires du type: $k \frac{d^\beta}{dt^\beta} x(t) + x(t) = u(t)$, $1 < \beta < 2$, $k > 0$. La problématique ainsi posée peut être considérée comme une extension systématique, à la fois simple et bien adaptée à l'optimisation numérique, du contrôle CRONE développé par A. Oustaloup [11], au cadre plus général (et plus souple car de structure vectorielle) de contrôleurs de type diffusif. A noter que la méthodologie décrite s'étend naturellement aux systèmes multivariables et est tout à fait compatible avec la formulation standard [14], qui n'est pas utilisée ici.

²La méthode d'approximation des intégrateurs fractionnaires utilisée pour les simulations est décrite dans [9], [?].

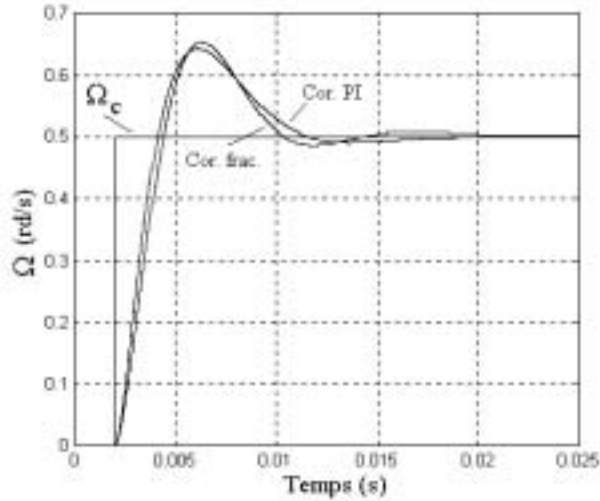


FIGURE 8. Réponses indicielles pour $J = J_{max}$

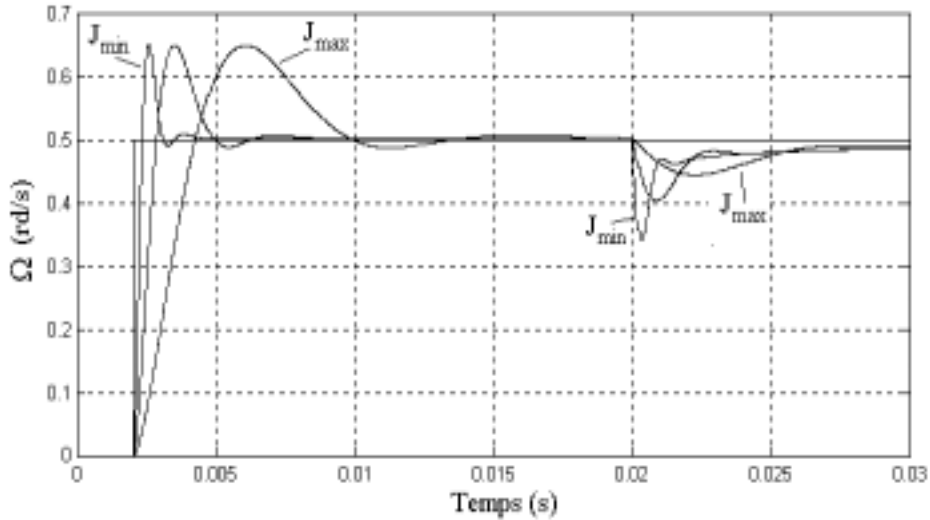


FIGURE 9. Réponse du variateur avec la commande fractionnaire

3.1. ANALYSE D'UNE ÉQUATION FRACTIONNAIRE SIMPLE

On considère l'équation:

$$k \frac{d^\beta}{dt^\beta} x(t) + x(t) = u(t), \quad 1 < \beta < 2, \quad k > 0. \tag{3.1}$$

La fonction de transfert associée est:

$$H_\beta(p) = \frac{1}{kp^\beta + 1} = \frac{1}{(\tau p)^\beta + 1}, \quad \text{avec } \tau = k^{\frac{1}{\beta}}. \tag{3.2}$$

On remarque immédiatement que:

tout changement de valeur de k est équivalent à un changement d'unité de temps (ou de fréquence).

Autrement dit, pour toute valeur de k , la réponse échelon ou en fréquence de (3.1) est identique à un changement d'unité de temps (ou de fréquence) près. C'est cette propriété qui est en fait reflétée dans la figure 9, lorsque J varie³.

3.2. POSITION DU PROBLÈME DE CONTRÔLE ROBUSTE

Cette propriété d'invariance par changement d'unité de temps est alors interprétée comme une forme de robustesse par rapport au paramètre k . En effet, par analogie à une fonction de transfert traditionnelle de la forme: $\frac{1}{1 + \frac{2\zeta}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$, le transfert (3.2) présente la propriété d'invariance du facteur d'amortissement (fixé en fait par β), le premier dépassement de la réponse à l'échelon étant évidemment constant, la fréquence de résonance seule variant avec k (par l'effet du changement d'échelle). Transposé dans le domaine de l'automatique, l'objectif est de construire un compensateur permettant d'obtenir un comportement en boucle fermée se rapprochant le plus possible de celui de (3.1).

La propriété d'invariance (ou de quasi invariance) recherchée est plus précise que celle d'invariance du facteur d'amortissement, car c'est toute une fonction qui est considérée, au lieu d'un simple paramètre réel. Le problème de robustesse consiste alors à mimiser une fonctionnelle construite de manière à traduire l'écart entre la réponse en boucle fermée réelle et la réponse idéale recherchée (en terme de réponse en fréquence ou à l'échelon).

3.2.1. FORMULATION DU PROBLÈME. Suivant [8], en notant $H_K(p)$ la fonction de transfert en boucle fermée d'un système dépendant d'un paramètre J pouvant varier dans un certain domaine, commandé par un contrôleur de transfert $K(p)$, et $H_0(p)$ un transfert en boucle fermée *désiré* pour le système *nominal*, le problème peut s'écrire sous forme d'un problème d'optimisation:

$$\min_K F(H_K), \quad (3.3)$$

où, K étant fixé, $F(H_K) \geq 0$ est la plus grande valeur des écarts (par exemple au sens H_∞ [14]) entre $H_K(\gamma p)$ et $H_0(p)$, pour J parcourant son domaine de variations, et γ (dépendant de J et K) correspondant au changement d'unité de fréquence rendant $H_K(\gamma p)$ le plus proche de $H_0(p)$. Pour que ce problème soit bien posé, il faut en outre rajouter la contrainte correspondant au fait que pour le paramètre nominal J_0 , le changement d'unité est $\gamma = 1$. Cette formulation quelque peu complexe de prime abord, reste en fait très naturelle: dit autrement, il s'agit de trouver dans une classe de compensateurs la plus étendue possible (qui sera définie au paragraphe suivant), le compensateur qui permet de garantir à la fois un comportement *nominal* le plus proche d'un comportement *désiré*, tout en conservant le plus possible ce comportement pour les valeurs non nominales de J , à un *changement d'unité de fréquence près*: $p' = \gamma p$.

On peut remarquer qu'aucune hypothèse n'a été faite concernant la fonction de transfert H_K , qui peut parfaitement être une matrice (problème multivariable), permettant ainsi de prendre en compte aussi bien le problème de poursuite, du rejet de perturbation, ou de façon plus réaliste d'un compromis entre les deux.

De même, aucune hypothèse a priori n'a été faite sur $H_0(p)$, qui peut être en pratique construite sur le procédé nominal suivant les approches standard de l'automatique (PID, retour d'état, commande optimale, H_∞, \dots).

³Il est démontré dans [8] que cette propriété, vraie seulement pour les équations de la forme (3.1), est en fait à la base des travaux d'A. Oustaloup, inspirés par le comportement dynamique particulier des digues poreuses, modélisés par (3.1) [11].

La forme exacte de la fonctionnelle F n'est pas explicitée dans cet article qui se veut avant tout introductif. Davantage de détails peuvent être trouvés dans [8]. Un exposé plus complet sera présenté dans un article ultérieur.

3.2.2. INTERPRÉTATION SIMPLE: APPARITION DES COMPENSATEURS FRACTIONNAIRES. On considère le cas particulier décrit dans la figure 10. Le transfert désiré en boucle fermée pour J_0 (paramètre nominal) est $H_\beta(p)$ défini par (3.2).

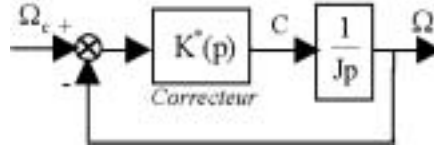


FIGURE 10

Soit:

$$K^*(p) = \frac{1}{p^\alpha}, \alpha = \beta - 1.$$

Un calcul très simple montre que le transfert en boucle fermée obtenu par K^* s'écrit:

$$H^*(p) = \frac{1}{1 + \frac{1}{J}p^\beta}, \tag{3.4}$$

de la forme (3.2). On en déduit immédiatement que $K^*(p)$ est la solution (par définition du problème) de (3.3). Ce résultat est évident, la valeur de $F(H^*)$ étant alors 0. Le résultat qui suit montre en revanche que le problème (3.3) permet d'atteindre les compensateurs fractionnaires, lorsqu'ils sont solution, à partir d'un compensateur *standard*, sans qu'aucune référence à des opérateurs fractionnaires ne soit nécessaire.

On considère le cas décrit dans la figure 11, où $K_0(p)$ est un compensateur de la forme PI:

$$K_0(p) = \frac{ap + b}{p}, \tag{3.5}$$

déterminé pour conférer classiquement au système en boucle fermée une réponse nominale du 2ème ordre désirée: $H_0(p)$.

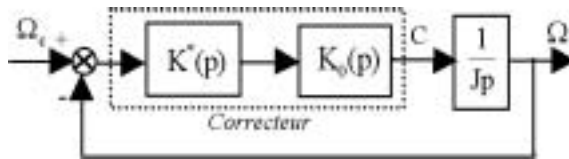


FIGURE 11

On peut alors énoncer le résultat, démontré dans le cas général dans [8]:

THEOREME 1: La solution du problème (3.3) est de la forme:

$$K^*(p) = \frac{p}{(ap + b)p^\alpha}, 0 < \alpha < 1. \tag{3.6}$$

De la sorte, le compensateur résultant:

$$\overline{K}(p) := K^*(p)K_0(p) = \frac{1}{p^\alpha},$$

confère au système un transfert en boucle fermée de même type, à savoir celui de (3.2), *indépendamment* de la nature de K_0 (qui n'intervient en fait *que* dans la valeur

de α (déterminée par le processus d'optimisation), liée au facteur d'amortissement induit par K_0 . A noter que la valeur optimale de F n'est plus 0.

Dans le cas du systèmes plus complexe décrit figure 4.8, et a fortiori lorsque la fonctionnelle F est basée sur un compromis entre poursuite et rejet de perturbation, la solution n'est plus exprimable à partir d'opérateurs fractionnaires, et n'est évidemment pas une fonction rationnelle. On présente ci-après la formulation diffusive qui permet de poser le problème (3.3) non plus par rapport à un compensateur "abstrait" K , mais par rapport à un vecteur de \mathbf{R}^n , le problème pouvant alors être abordé par les méthodes d'optimisation nombreuses existant dans la littérature.

3.3. FORMULATION DIFFUSIVE

Les représentations diffusives, introduites par J. Audounet et G. Montseny, ont permis d'aborder avec succès de nombreux problèmes innaccessibles par les approches standard [13], [9], [1], [5].... A l'origine introduit pour la classe des opérateurs integrodifférentiels fractionnaires, cet outil a été étendu à une classe plus générale [10], possédant une structure vectorielle. En outre, les facilités d'approximation numériques des diffusions permettent en pratique de réduire considérablement la dimension, de sorte qu'un problème tel que (3.3) peut se ramener à une optimisation dans \mathbf{R}^n , pour n de l'ordre de 10 (voir par exemple [?]). On rappelle ici le principe (voir [10] pour plus de détails).

Etant donnée une fonction de transfert $H(p)$, de réponse impulsionnelle associée $h(t)$, la représentation diffusive de H , lorsqu'elle existe, est définie très simplement par:

$$\mu = \mathcal{L}^{-1}h,$$

\mathcal{L} désignant la transformation de Laplace. De façon plus précise, $h(t) = \int_0^{+\infty} e^{-t\xi} \mu(\xi) d\xi$, de sorte que la relation: $y(t) = (h * u)(t)$ ou encore, dans le domaine fréquentiel: $Y(p) = H(p)U(p)$, s'obtient sous la forme standard d'état, d'entrée u , de sortie y , dite "réalisation diffusive":

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \psi_\xi(t) = -\xi \psi_\xi(t) + u(t), \quad \xi \geq 0, \quad \psi_\xi(0) = 0 \\ y(t) := \int_0^{+\infty} \mu(\xi) \psi_\xi(t) d\xi. \end{cases} \quad (3.7)$$

Par ailleurs, le même couple (ψ, μ) permet de réaliser le transfert $Y(p) = pH(p)U(p)$, sous la forme, dite "réalisation diffusive étendue" (sous l'hypothèse $pH(p)$ propre):

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \psi_\xi(t) = -\xi \psi_\xi(t) + u(t), \quad \xi \geq 0, \quad \psi_\xi(0) = 0 \\ y(t) := \frac{d}{dt} \int_0^{+\infty} \mu(\xi) \psi_\xi(t) d\xi = \int_0^{+\infty} (-\xi \mu(\xi) \psi_\xi(t) + \mu(\xi) u(t)) d\xi. \end{cases} \quad (3.8)$$

L'ensemble des représentations diffusives, noté Δ , est un espace vectoriel (de distributions), qui permet de réaliser sous la forme (3.8) une grande variété de comportements dynamiques, notamment tout opérateur différentiel fractionnaire d'ordre α complexe, tel que $\Re(\alpha) < 1$. Sur cet ensemble est en outre défini le produit noté $\#$, permettant de déterminer la représentation diffusive associée au produit de deux fonctions de transfert⁴ (3.7) (voir [10]):

$$\mu \# \nu := -\mu \cdot (\nu * \text{vp} \frac{1}{\xi}) - \nu \cdot (\mu * \text{vp} \frac{1}{\xi}). \quad (3.9)$$

Un compensateur diffusif général $K_\mu(p)$ sera donc défini par $\mu \in \Delta$, de structure entrée-sortie définie par (3.8), c'est à dire: $Y(p) = K_\mu(p) \cdot U(p) \Leftrightarrow (3.8)$.

⁴La "valeur principale" $\text{vp} \frac{1}{\xi}$ est une distribution définie par: $\int f(\xi) \text{vp} \frac{1}{\xi} d\xi := \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} (\int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{f(\xi)}{\xi} d\xi + \int_{\epsilon}^{+\infty} \frac{f(\xi)}{\xi} d\xi)$.

De tels compensateurs sont a priori de dimension infinie, du fait que ξ est un paramètre réel. Néanmoins, tout système de la forme (3.8) peut être approximé en dimension réduite sous la forme [10] (avec $\mu = (\mu_i) \in \mathbf{R}^n$):

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \psi_i(t) = -\xi_i \psi_i(t) + u(t), \quad i = 1, n-1, \quad \psi_i(0) = 0 \\ y(t) := \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i \psi_i(t) + \mu_n u(t), \end{cases} \quad (3.10)$$

où les constantes de temps $1/\xi_i$ sont à fixer en fonction de la plage de fréquences utiles associée au problème (voir [9], [?]). Un tel système peut être mis en œuvre sur calculateur numérique ou bien réalisé par un système analogique décrit figure 12. A noter qu'en pratique, des valeurs de n de l'ordre de 10, sont tout à fait suffisantes.

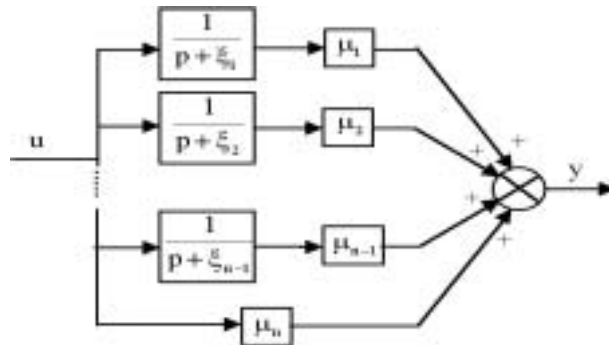


FIGURE 12. Réalisation analogique du compensateur diffusif

Le problème (3.3) peut alors être réécrit:

$$\min_{\mu \in \Delta} F(H_{K\mu}), \quad (3.11)$$

ou, sous approximation en dimension finie, sous la forme concrète (du fait que la variable d'optimisation est un vecteur de dimension n):

$$\min_{\mu \in \mathbf{R}^n} F(H_{K\mu}), \quad (3.12)$$

dont la solution $\mu^* = (\mu_i^*)_{i=1,n}$, conduit au compensateur dynamique directement utilisable défini par (3.10). Le nombre n est à choisir en fonction du compromis fixé par la complexité numérique de la résolution de (3.11).

4. RETOUR AU MODÈLE DE MACHINE ÉLECTRIQUE

Les paragraphes précédents ayant permis d'introduire le principe de contrôle diffusif robuste, associé aux représentations diffusives, il est possible de considérer sous un angle nouveau le problème de commande d'une machine électrique, modélisé par (4.8).

4.1. SOLUTION OPTIMALE DANS LE CAS DE LA POURSUITE SEULE

En prenant en compte la boucle de courant et conformément aux résultats énoncés dans les paragraphes précédents, on recherche un compensateur diffusif permettant une réponse nominale de poursuite en boucle fermée du type:

$$H_{di}(p) = \frac{1}{\frac{J}{A_{di}k_e} p^{1+\alpha} + 1};$$

Pour cela, le compensateur optimal au sens de (3.3) est de la forme:

$$K(p) = A_{di} \frac{1 + T_{BIP}}{p^\alpha} = A_{di} T_{BI} \frac{1/T_{BI} + p}{p^\alpha} := k \frac{a + p}{p^\alpha} = kp \left(\frac{1}{p^\alpha} + \frac{a}{pp^\alpha} \right). \quad (4.1)$$

D'après [10], en notant:

$$\mu_\alpha(\xi) = \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi} \frac{1}{\xi^\alpha}, \quad (4.2)$$

la représentation diffusive correspondant à ce transfert sous la *réalisation d'état entrée-sortie étendue* (3.8), est donnée par⁵:

$$\mu(\xi) = k(a\mu_\alpha \# \delta + \mu_\alpha)(\xi) = -ka \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi} \text{pf} \frac{1}{\xi^{\alpha+1}} + k \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi} \frac{1}{\xi^\alpha}, \quad (4.3)$$

qui peut être approchée en dimension finie selon un procédé de discrétisation simple. Le compensateur ainsi défini prend alors la forme (3.10). D'après l'analogie général du théorème 1 ([8], théorème 4.3), on obtient le résultat essentiel:

**le compensateur défini par (4.1) est trouvé systématiquement
par résolution du problème (3.3).**

4.2. FORMULATION À PARTIR D'UN COMPENSATEUR CLASSIQUE

D'un point de vue concret, le compensateur optimal peut être obtenu par résolution de (3.11), à partir d'un compensateur classique de type PI: $K_0(p) = A \frac{1+Tp}{Tp}$, le transfert en boucle fermée $H_{K_\mu}(p)$ en étant déduit, d'après la figure 13.

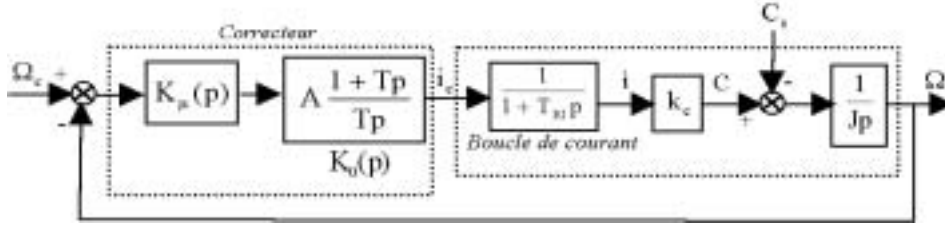


FIGURE 13. Compensateur diffusif à partir d'un compensateur PI

On peut énoncer le résultat principal:

THEOREME 2: *Le compensateur optimal est défini par le transfert diffusif entrée(u)-sortie(y):*

$$\begin{cases} \partial_t \psi = -\xi \psi_\xi + u, \quad \xi \geq 0, \quad \psi_\xi(0) = 0 \\ y := \int_0^{+\infty} (-\xi \mu(\xi) \psi_\xi(t) + \mu(\xi) u(t)) d\xi, \end{cases} \quad (4.4)$$

avec μ définie par:

$$\begin{aligned} \mu(\xi) &= k(-\xi + a) \left(\text{vp} \frac{\mu_\alpha(\xi)}{b-\xi} + q\delta_b(\xi) \right), \\ q &:= \int_0^{+\infty} \text{vp} \frac{\mu_\alpha(\xi)}{b-\xi} d\xi. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Preuve. Il suffit de montrer que le transfert:

$$K_\mu(p) = \frac{A_{di}}{A} \frac{1}{p^\alpha} \cdot \frac{Tp(1+T_{BIP})}{1+Tp} := k \frac{1}{p^\alpha} \cdot \frac{p(p+a)}{p+b} \quad (4.6)$$

⁵Les calculs sont nécessairement considérés au sens des distributions [10], c'est à dire respectivement au sens des "valeurs principales" (vp) ou "parties finies" (pf), lorsque les fonctions ne sont pas intégrables en un point [12].

est réalisable par (4.4), (4.5). De la sorte, on vérifie bien que $K_\mu(p) \cdot K_0(p) \cdot \frac{1}{(1+T_{BIP})} = \frac{1}{p^\alpha}$ et le transfert en boucle fermée est $\frac{1}{k'p^{1+\alpha}+1}$ qui est bien le transfert optimal. D'après (4.6):

$$K_\mu(p) = kp(p+a) \left(\frac{1}{p^\alpha} \cdot \frac{1}{p+b} \right). \quad (4.7)$$

En notant:

$$\nu(\xi) := (\mu_\alpha \# \delta_b)(\xi) = \mu_\alpha(\xi) \vee p \frac{1}{b-\xi} + q\delta_b(\xi), \quad (4.8)$$

et suivant les règles de calcul établies dans [10], la représentation diffusive associée à (4.7) sous la réalisation (3.8), est définie par:

$$\mu(\xi) = -k\xi\nu(\xi) + kav(\xi).$$

◇

Remarque importante: Dans une telle approche, la nature fractionnaire du contrôleur optimal *n'est pas considérée a priori*: seul un compensateur *standard* sert de point de départ pour initialiser le processus d'optimisation (dans \mathbf{R}^n), la valeur initiale de μ pouvant être $\mu^0 = (0, 0, \dots, 0, 1)$, de telle sorte que $K_{\mu^0}(p) = 1$ (le système en boucle fermée étant alors identique à celui obtenu au paragraphe 2.2).

4.3. COMPROMIS POURSUITE-REJET DE PERTURBATION: QUELQUES REMARQUES

Comme mis en évidence dans le paragraphe 2.3, le compensateur fractionnaire (3.8)-(4.3), optimal en poursuite, est moins bon en régulation. La prise en compte des deux aspects dans une même fonctionnelle F (problème multivariable) conduira après optimisation (à partir d'un compensateur standard K_0), à un compensateur de type diffusif, de structure analogue à (3.10), mais ne présentant pas a priori de comportement purement fractionnaire, comme dans le cas de la poursuite.

En effet, il a été mis en évidence par expérimentation numérique, qu'un compensateur fractionnaire pur, à cause de la présence d'un dérivateur fractionnaire dans la fonction de transfert de régulation en boucle fermée, engendre des comportements "lents", de type "mémoire longue". Du point de vue de la régulation, un raisonnement analogue au cas de la poursuite permettrait de construire un compensateur optimal au sens de l'invariance par changement d'unité de fréquence, de la réponse à une perturbation type (un tel compensateur ferait apparaître une composante fractionnaire). L'inconvénient de type traînage évoqué se retrouverait alors probablement cette fois en poursuite.

Un compensateur diffusif optimal vis à vis d'une fonctionnelle de compromis entre régulation et poursuite sera en revanche strictement meilleur qu'un compensateur classique, celui-ci faisant partie de la classe diffusive (pour $\mu = (0, 0, \dots, 0, 1)$). La détermination numérique de ce compensateur est actuellement en cours d'étude, les résultats seront présentés dans une communication ultérieure.

5. CONCLUSION

La démarche présentée dans cet article pour la synthèse d'un compensateur robuste, peut se résumer en les étapes suivantes⁶ [8]:

1. interprétation du compensateur en termes de *minimum* d'une fonctionnelle traduisant la robustesse au sens de *l'invariance par changement d'unité de fréquence*,

⁶Cette démarche permet de retrouver systématiquement par optimisation numérique dans \mathbf{R}^n , notamment les compensateurs CRONE [11], qui constituent une sous-classe des compensateurs diffusifs.

2. la solution optimale (ici fractionnaire) peut être obtenue *sans aucune référence* à la nature particulière des transferts, un transfert nominal désiré *classique* pouvant servir de référence,
3. cette solution peut être obtenue à partir d'une *formulation diffusive*, qui conduit, sous approximation, à un problème bien posé dans \mathbf{R}^n (le processus d'optimisation étant initialisé par $\mu_0 = (0, 0, \dots, 0, 1)$),
4. extension *naturelle* au cas *multivariable* (par exemple, compromis poursuite-régulation).

Le problème présenté dans cet article se situe dans le contexte général du "contrôle diffusif", où les propriétés particulières des diffusions sont mises à profit tant pour la robustesse que pour les performances [8], [9]. Dans le cas présent, le problème d'optimisation (3.3) renferme toutes les difficultés inhérentes à la robustesse aux variations de paramètres. Néanmoins, ce problème est bien posé et adapté aux approches numériques, pour lesquelles existe une importante littérature. En outre, le cas particulier considéré, de par sa simplicité, conduit à de nombreuses simplifications permettant de réduire considérablement la complexité du problème.

La fonctionnelle F , qui reflète en fait la nature de la robustesse recherchée, peut avantageusement être construite sur la base de formulations standard, avec critère de type H_2 ou H_∞ , domaines pour lesquels de nombreuses méthodes ont été mises au point au cours des dernières années (par exemple [3] dans le cas H_2 , bien adapté au présent problème).

Des travaux sur ce thème sont actuellement en cours, notamment sur l'aspect résolution numérique de (3.3) et mise en œuvre sur processus réels.

Remerciement: L'auteur tient à remercier Gérard Montseny pour ses suggestions et son aide précieuse lors de la réalisation de cette étude.

REFERENCES

- [1] J. Audounet, V. Giovangigli, J.M. Roquejoffre, "A threshold phenomenon in the propagation of a point-source initiated flame", *Physica D*, pp 295-316, 1998.
- [2] B. Bergeon, E. Irving, "Commande robuste à modèle fréquentiel de référence". *RAIRO APII*, vlo 24, no 1, pp 83-97, 1990.
- [3] J.C. Geromel, P.L.D. Peres, J. Bernussou, "On a convex parameter space method for linear control design of uncertain systems". *SIAM J. on Cont. and Opt.*, vol 29, pp 381-402, 1991.
- [4] J.P. Caron, J.P. Hautier, "Modélisation et commande de la machine asynchrone". Editions TECHNIP, méthodes et pratiques de l'ingénieur, 1995.
- [5] G. Garcia, J. Bernussou, "Identification of the dynamics of a lead acid battery by a diffusive model". Dans ce volume.
- [6] D. Heleschewitz, D. Matignon, "Diffusive realizations of fractional integrodifferential operators: structural analysis under approximation", *IFAC Conference Systems, Structure and Control*, Nantes, 1998, vol2, pp243-248.
- [7] D. Matignon, "Stability results on fractional differential equations with applications to control processing", *Computational Engineering in Systems Applications*, vol 2, pp 963-968, Lille, France, 1996. IMACS, IEEE-SMC.
- [8] G. Montseny, J. Audounet, J. Bernussou, "Diffusive approach to robust control", *IFAC Conference Systems, Structure and Control*, Nantes, 1998, vol2, pp 303-308.
- [9] G. Montseny, J. Audounet, D. Matignon, "Fractional integrodifferential boundary control of the Euler-Bernoulli beam", *36th IEEE CDC's Conference*, San Diego (USA), 1997, pp 4973-4978.
- [10] G. Montseny, "Diffusive representation of pseudodifferential time-operators". Dans ce volume.
- [11] A. Oustaloup, "La commande CRONE", Hermès, 1991.
- [12] L. Schwartz, "Théorie des distributions", Hermann.
- [13] J. Solhusvik, F. Lavernhe, G. Montseny, J. Farré, "A new low-noise CCD signal acquisition method based on a commutable band-pass filter", *IEEE Trans. Circ. and Syst. II*, vol 44, no 3, pp164-173, March 1997.
- [14] K. Zhou, J. C. Doyle, K. Glover, "Robust and optimal control". Prentice Hall, 1996.