

La Modélisation et le Calcul de la combustion turbulente : Problèmes généraux et solutions partielles

Roland BORGHI

Résumé. Les chambres de combustion et les brûleurs industriels sont de plus en plus conçus en faisant appel à des calculs prévisionnels des champs de vitesse, de température, et de toutes les caractéristiques intéressantes. Ce type de calcul pose des problèmes de modélisation très difficiles mais très intéressants, d'autant plus que dans la très grande majorité des cas l'écoulement y est turbulent. Nous décrivons ici d'abord les problèmes posés par la modélisation de la "combustion turbulente", en la présentant comme une généralisation de la modélisation de la turbulence classique. Les modèles les plus simples, reliés au cas où on peut supposer que les réactions chimiques sont très rapides devant la dynamique des gaz, sont décrits ensuite, et l'on remarque que les taux de réaction moyens ne sont plus alors contrôlés par la chimie, mais par le mélange turbulent des gaz.

Enfin on décrit les grandes lignes d'une méthode récente de modélisation statistique Lagrangienne-Eulerienne qui permet de considérer les cas où les réactions chimiques ne sont pas forcément très rapides, et on donne des exemples d'application.

Mots clés. Modélisation, combustion, flamme, turbulence.

AMS Subject Classification. 80 A 25, 65 C05

1 la combustion et les flammes.

La combustion est un ensemble de réactions chimiques qui se produisent en présence d'un écoulement, ou même très souvent au sein d'un écoulement gazeux. Ce qu'on appelle une flamme est la région de l'espace où se produisent les phénomènes chimiques et physiques associés.

La modélisation mathématique de tous ces phénomènes se fait à l'échelle macroscopique. Pour un milieu qui n'est pas turbulent et qui ne contient que des gaz, cela donne lieu à la considération des équations de la mécanique des fluides, de la "chaleur", c'est-à-dire le bilan d'énergie appelé quelquefois le "premier principe de la thermodynamique", et des équations de bilan des espèces chimiques en présence. Le bilan de l'énergie rayonnée doit être en principe associé à celui d'énergie interne, mais il peut être négligé pour toute

une gamme de conditions. . . On schématise ces équations par un système d'équations aux dérivées partielles de bilan suivant un point de vue eulérien :

$$E(\rho, \rho \underline{u}, \rho e_t, \rho Y_i) = S(\cdot),$$

avec un "opérateur différentiel à plusieurs composantes" E , et un vecteur de fonctions "source" S dont les composantes sont : 0 (pour ρ), les forces à distance (pour le vecteur vitesse \underline{u} , la puissance des forces à distance (pour l'énergie totale), et les taux volumiques des réactions chimiques (pour ρY_i). Le tableau I montre ces équations.

Pour représenter les phénomènes de diffusion de chaleur, de quantité de mouvement et de masse, et les taux des réactions chimiques, la modélisation nécessite des considérations de physique statistique ou des lois empiriques. Ces considérations sont connues depuis au moins cent ans, après Fick, Fourier, Newton, Arrhenius. . . Les équations mathématiques obtenues doivent encore être résolues, et cela pose des problèmes de mathématique et d'analyse numérique. Ils sont dus au fait que les équations sont fortement couplées entre elles, qu'elles sont non linéaires, et aussi que les différents temps caractéristiques qui interviennent ont des ordres de grandeur très dispersés, ce qui donne un problème "raide". En particulier, les temps caractéristiques associés aux réactions chimiques sont multiples, très dépendants des conditions, et peuvent être différents de plus de dix ordres de grandeurs ! Beaucoup de ces problèmes ont fait l'objet d'études poussées ces temps derniers, et sont (presque) résolus, tant pour les "flammas de prémélange" (où le combustible et le comburant sont mélangés intimement avant d'entrer dans la flamme), que pour les "flammas de diffusion" (où combustible et comburant entrent dans la flamme séparément) ; on se reportera, pour des exemples, à la référence [1].

Mais la majorité des flammes pratiques font appel à des phénomènes turbulents.

Ceux-ci impliquent que des solutions stationnaires n'existent pas au sens strict, et que les situations expérimentales ne sont pas reproductibles, encore au sens strict ! La conséquence en est que les équations précédentes, quoique encore valables, ne sont pas utiles en pratique. Il faut insister sur ce point : les calculs très longs et coûteux qu'on appelle "simulations numériques directes" sont des expériences numériques qui ne peuvent pas correspondre à une expérience réelle donnée, et ne constituent que de rares "échantillons" de l'infinité des situations possibles pour les mêmes (au sens macroscopique) conditions aux limites. Il faut donc trouver une nouvelle approche d'étude et de modélisation.

L'approche initiée par O. Reynolds à la fin du siècle dernier est basée sur la constatation expérimentale qu'il existe des solutions stationnaires en moyenne, et que les écoulements, en moyenne, sont reproductibles. Il faut donc trouver des équations nouvelles pour ces "moyennes", qui constitueront des modèles nouveaux pour ces nouveaux cas. Cette approche a été utilisée pour tout écoulement turbulent non réactif, elle peut l'être aussi pour des flammes turbulentes, avec les difficultés supplémentaires qu'apportent les très fortes non-linéarités des taux des réactions chimiques.

Une première difficulté pour cette approche est la définition claire et rigoureuse des "moyennes" : statistiques pour un ensemble d'événements ? statistiques avec certaines conditions ? pondérées par certaines quantités ? Il y a plusieurs façons de voir les choses.

La seconde difficulté est ensuite l'obtention des équations pour ces moyennes, en modélisant la réalité trop complexe. La modélisation à ce niveau est uniquement affaire de physique, et pas de mathématique (quoiqu'il faille qu'elle vérifie les principes habituels des mathématiques, et même de la logique ...). Enfin pour résoudre de nouveau ces nouvelles équations, les mathématiques et l'analyse numérique ont leur rôle à jouer.

2 Les problèmes de la modélisation de la combustion turbulente.

2.1

Pour le moment, nous ne considérerons que des moyennes d'ensembles de "réalisations" macroscopiquement identiques, avec une pondération par la masse volumique pour toutes les variables extensives (c'est-à-dire sauf ρ et p), dont le promoteur principal a été A. Favre, voir par exemple réf. 2. Les équations nouvelles, où les moyennes pondérées par ρ sont surmontées d'un tilde et celles qui ne le sont pas d'une barre, peuvent être écrites formellement comme :

$$\overline{E}(\overline{\rho}, \overline{\rho \underline{u}}, \overline{\rho \tilde{e}_t}, \overline{\rho \tilde{Y}_i}) = \overline{S}(\dots)$$

avec un nouvel opérateur et un nouveau vecteur de sources (moyennes cette fois), qui sont clairement tous deux différents des E et S précédents, à cause de la non-linéarité de ces derniers.

On connaît plusieurs façons d'écrire ce système pour le cas d'écoulements non réactifs, suivant le modèle utilisé : $\overline{E}_{Pr}(\overline{\rho}, \overline{\rho \underline{u}}, \overline{\rho \tilde{e}_t}, \overline{\rho \tilde{Y}_i}) = \overline{S}_{Pr}(\dots)$ pour le modèle de Prandtl, ou pour le modèle $k - \varepsilon$, $\overline{E}_{k\varepsilon}(\overline{\rho}, \overline{\rho \underline{u}}, \overline{\rho \tilde{e}_t}, \overline{\rho \tilde{Y}_i}, \overline{\rho \tilde{k}}, \overline{\rho \tilde{\varepsilon}}) = \overline{S}_{k\varepsilon}(\dots)$. Dans ce second cas, on voit apparaître les nouvelles inconnues k et ε , ce qui complique les résolutions numériques et les propriétés mathématiques... Le tableau II donne par exemple le système associé au modèle $k - \varepsilon$ dans le cas où on suppose que le nombre de Reynolds de la turbulence est très élevé, et ne doit donc plus jouer. La structure du nouvel opérateur est classique, et la physique de la turbulence est essentiellement représentée dans le terme source \overline{S} . Une importante caractéristique des modèles de turbulence, et en particulier du modèle $k - \varepsilon$, est qu'ils sont "empirico-théoriques", et font intervenir des constantes numériques dont la valeur doit être fixée par l'expérience. Ces modèles ne sont valables que dans un certain domaine de situations, qui n'est pas toujours connu très précisément. Des explications plus détaillées sur les fondements physiques de ces modèles peuvent se trouver en réf. [2] ou [3]. On verra aussi en réf. [3] que des recherches continuent pour élargir toujours le domaine de validité d'un modèle. En particuliers, les derniers développements utilisent des moyennes définies de façon différentes (et pas toujours assez claire), en permettant une représentation instationnaire des grosses structures (à faible fréquence) de la turbulence, mais en moyennant les trop petites structures, trop rapidement variables.

Dans le cas de la combustion turbulente, il est clair que l'établissement d'un nouveau système $\overline{E} = \overline{S}$ se heurtera au problème posé par la non linéarité des termes sources chimiques dans les équations pour les \tilde{Y}_i . Pourra-t-on trouver des modèles de \overline{S} en fonction

seulement des arguments qui apparaissent dans $\overline{E_{Pr}}$ ou $\overline{E_{k\varepsilon}}$? Nous allons voir que, sauf un cas simple, la réponse à cette question non.

2.2

Considérons d'abord un cas limite où toutes les réactions chimiques sont infiniment rapides par rapport à tous les autres processus (turbulents en particulier). Pour présenter quelques modèles établis dans ces conditions, il faut séparer les cas des flammes de prémélange et des flammes de diffusion (non-prémélangées).

En milieu prémélangé, le modèle le plus simple est celui appelé "Eddy Break-Up" (EBU), qui utilise soit $\overline{E_{Pr}}$, soit $\overline{E_{k\varepsilon}}$, avec simplement une expression particulière de la source moyenne. Cette expression dépend des fonctions arguments des opérateurs respectifs, et a une interprétation physique (basée sur certaines hypothèses), mais laisse libre une constante de proportionnalité, qui doit donc être ajustée grâce à une (seule) expérience.

Le modèle "Eddy-Break-Up" est dû aux travaux de D.B. Spalding, F. C. Lockwood, K.N.C. Bray et B. Moss (voir par exemple la réf. [4]). Il suppose que les réactions chimiques sont infiniment rapides dès que très peu de gaz brûlés viennent au contact des gaz frais, et que le milieu est adiabatique. Dans ces conditions, on peut définir un "degré d'avancement de la combustion", c , qui ne peut prendre que les valeurs zéro (dans les gaz frais) et un (dans les gaz parfaitement brûlés, donc à l'équilibre chimique), et on relie linéairement tous les \tilde{Y}_i à la valeur moyenne \tilde{c} . On montre alors, avec une nouvelle hypothèse, que le taux de production de \tilde{c} peut s'écrire :

$$\tilde{W}_c = \frac{C_{EBU}}{\tau_t} \tilde{c}(1 - \tilde{c})$$

Tous les taux de réaction moyens pour les \tilde{Y}_i sont proportionnels à celui de \tilde{c} . C_{EBU} est la constante qui doit être obtenue par l'expérience, et τ_t est un temps caractéristique intégral de la turbulence. Dans le cadre du modèle $k - \varepsilon$, il n'est autre que k/ε , et dans celui du modèle de Prandtl, c'est : $\left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^{-1}$.

On peut avoir une justification physique simple de cette formule, mais seulement approximative car ce n'est pas celle qui a conduit initialement au modèle EBU. En effet, si les réactions chimiques sont très rapides une fois que les gaz frais sont mis en contact avec les gaz brûlés, le taux moyen de combustion sera seulement proportionnel au taux de mise en contact des gaz frais et des gaz brûlés, sans liaison aucune avec la chimie. Il sera donc proportionnel à la probabilité de trouver au même endroit (presque) des gaz frais et des gaz brûlés, donc au produit de la probabilité de trouver des gaz frais et de celle de trouver des gaz brûlés, donc à $\bar{c}(1 - \bar{c})$, ou, approximativement, à $\tilde{c}(1 - \tilde{c})$. De plus, ce taux sera proportionnel à la fréquence moyenne des rencontres entre gaz frais et gaz brûlés, donc à $1/\tau_t$. On retrouve alors la formule donnée plus haut...

D'autres modèles existent, justifiés par le fait que la constante en question a un domaine de validité assez étroit. Ils doivent être représentés par des opérateurs différents en plus de sources différentes, car ils font intervenir de nouvelles fonctions arguments. Par

exemple ces nouveaux arguments sont le “taux de dissipation scalaire” ou la “densité de surface de flamme”, voir par exemple les réf. [5] et [6].

Un problème simple et classique relié aux flammes turbulentes de prémélange est celui de l’existence ou non d’une flamme plane (en moyenne) se propageant à vitesse constante dans un milieu à turbulence donnée et constante avant le passage de la flamme. Ce problème se ramène à une situation déjà traitée par Kolmogorov, Pistunov et Petrovski (réf. [7]) si l’on utilise le modèle EBU et que l’on suppose de plus le dégagement de chaleur suffisamment faible pour que la turbulence ne soit pas modifiée par la flamme, ni le champ de vitesse moyenne. Mais il reste ouvert pour d’autres modèles et si l’on s’intéresse à l’effet de la combustion sur la turbulence.

En milieu non-prémélangé, l’établissement d’un modèle physiquement justifié est plus délicat encore. Une façon de faire consiste à modifier l’opérateur pour prendre en compte comme fonction argument la densité de probabilité P des fluctuations d’une espèce chimique fictive inerte (on appelle cette dernière la “fraction de mélange”, f). On peut alors écrire :

$\overline{E_{PDF}}(\bar{\rho}, \bar{\rho} \tilde{u}, \bar{\rho} \tilde{e}_t, \bar{\rho} \tilde{P}, \bar{\rho} k, \bar{\rho} \varepsilon) = \overline{S}(\dots)$, avec la caractéristique intéressante que la source a une composante correspondant à P qui est nulle. Ce nouvel opérateur est nettement plus compliqué que les précédents : l’équation aux dérivées partielles correspondant à P a une dimension de plus que les autres, f . De plus, P n’est pas une fonction mais une distribution, c’est-à-dire qu’elle peut présenter des pics de Dirac. Voici de nouvelles difficultés en perspective pour le calcul numérique...

Le système $\overline{E_{PDF}} = \overline{S}$ n’est rien d’autre que le système $\overline{E_{k\varepsilon}} = \overline{S_{k\varepsilon}}$ du tableau II où l’on remplace les équations pour les \tilde{Y}_i par une équation pour $P(f; x, t)$. Cette équation est issue des travaux de Hopf, Lundgren, O’Brien et Dopazo, Pope (voir par exemple la réf. 4 pour une introduction...). Elle n’est pas exacte, et comporte une modélisation, dont il existe plusieurs versions et qui est en continue amélioration. Dans une des premières et plus simple version, cette équation s’écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}P) + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\bar{\rho}\tilde{u}_\alpha P) - \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\frac{\nu_t}{S_{ct}} \frac{\partial P}{\partial x_\alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial f} \left(\frac{C_D \varepsilon}{k} (f - \tilde{f}) P \right) = 0$$

où $\tilde{f} = \int_0^1 f P(f) df$. C_D est encore une constante à ajuster par l’expérience. Après le calcul de $P(f)$, on peut directement en déduire les \tilde{Y}_i par : $\tilde{Y}_i = \int_0^1 Y_i^{eq}(f) P(f) df$, où les $Y_i^{eq}(f)$ sont des relations imposées par l’équilibre chimique adiabatique. Une justification plus précise de l’utilisation de ces relations peut se trouver encore en réf. 4.

2.3

L’hypothèse de chimie très rapide n’est pas concevable dans beaucoup de cas, pour des flammes turbulentes comme pour des flammes laminares. On peut alors généraliser l’approche des densités de probabilité, mais ces dernières deviennent multidimensionnelles,

avec d'autant plus de dimensions qu'il y a d'espèces chimiques impliquées. D'abord, le calcul des termes chimiques doit être simplifié pour essayer de limiter le nombre de dimensions nécessaires, et c'est par l'utilisation de "tables chimiques", le moins possible multidimensionnelles, que cela est actuellement fait. La méthode la plus récente, et la plus prometteuse, est celle dite ILDM (Intrinsic Low Dimensional Manifold) basée sur les travaux de Lam et Goussis, et surtout de Maas et Pope (réf. [8]). De plus, des méthodes numériques particulières, du type de simulations statistiques de Monte-Carlo, sont habituellement utilisées.

3 Les solutions apportées par les simulations "Monte-Carlo" des densités de probabilité.

3.1

Le principe de la simulation par méthode de Monte-Carlo des densités de probabilité (PDF) multidimensionnelles consiste à calculer le déplacement dans l'espace probabiliste ainsi que dans l'espace physique d'un certain nombre (grand mais pas trop) de "particules probabilistes", en simulant les différents termes de l'équation de la PDF par des interactions de ces particules, après tirage au hasard. La simulation peut se baser sur les équations de bilan Euleriennes, mais aussi sur les équations Lagrangiennes, et dans ce dernier cas les particules probabilistes sont des modèles des "particules fluides" elles-mêmes. Les deux types de simulation ont été essayés. Dans le second cas, il a été choisi (pour assez de précision et assez peu de coût) de considérer les équations Lagrangiennes de seulement une partie des fonctions intéressantes : seules les fractions massiques et la température sont suivies de façon Lagrangienne, mais les $\bar{\rho}$, $\bar{\rho}\tilde{u}$, $\bar{\rho}\tilde{e}_t$, $\bar{\rho}\tilde{Y}_i$, $\bar{\rho}k$, $\bar{\rho}\varepsilon$ restent calculées par des équations de bilan Eulériennes, et un couplage avec les premières est organisé dans le processus de calcul, bien sûr.

Dans ces conditions, la modélisation des équations qui vont régir les évolutions des "particules fluides modèles" peut se faire directement sous forme Lagrangienne, avec des hypothèses beaucoup plus physiques. Divers modèles existent déjà, et on peut montrer qu'ils sont compatibles avec des modèles Euleriens existants, et les généralisent en quelque sorte.

Par exemple, la diffusion et la dissipation turbulentes peuvent se modéliser en suivant des particules fluides fictives, de position x et de fluctuation de vitesse \underline{u} (par rapport à la vitesse moyenne), par la méthode de Durbin :

$$u_i(t + \delta t) - u_i(t) = -\frac{\delta t}{\tau_t} u_i(t) + \sigma \sqrt{1 - (1 - \delta t/\tau_t)^2} \xi_i, \text{ et}$$

$$x_i(t + \delta t) - x_i(t) = (\tilde{u}_i + u_i(t)) \delta t$$

les ξ_i sont des nombres aléatoires gaussiens de moyenne nulle et de variance unité, σ étant proportionnelle à la racine carrée de k .

Le mélange à petite échelle, dans le cadre du modèle de Dopazo et O' Brien donné plus haut, se représente simplement par l'évolution de la fraction massique Y_i de chaque particule considérée suivant :

$$f(t + \delta t) - f(t) = \frac{C_D \varepsilon}{k} (\tilde{f} - f) \delta t$$

et pour simuler le mélange et les réactions chimiques en même temps il suffit d'écrire :

$$Y_i(t + \delta t) - Y_i(t) = \frac{C_D \varepsilon}{k} (\tilde{Y}_i - Y_i) \delta t + w_i \delta t$$

Des détails et des références à ce sujet pourront être trouvés en réf. [9] et [10].

3.2

Avec des modèles de ce type, on peut montrer des résultats correspondant à un certain nombre d'applications à des cas de calcul de flammes, soit simplement à l'air libre ou dans des chambres de combustion pratiques plutôt complexes. Très peu de résultats de nature mathématique ou du domaine de l'analyse numérique existent sur ces méthodes couplées... On peut voir par exemple Fig. 1 le calcul du champ de température moyenne dans une flamme-jet non prémélangée, où un jet de méthane sort à forte vitesse dans un écoulement parallèle d'air ; on est proche de l'extinction de la flamme, et cela correspond à l'expérience. Les Fig. 2 montrent une application au calcul de la propagation de la flamme dans un cylindre de moteur à piston à allumage par bougie, donc dans un milieu turbulent prémélangé. Ces résultats sont tirés des travaux présentés en réf. [11].

4 En guise de conclusion :

L'état des connaissances en combustion turbulente a beaucoup progressé depuis les quinze dernières années. Ces progrès sont la conséquence de l'association de la modélisation physique avec des méthodes et des codes de calcul numérique. Cela a permis à la fois des avancées de nature théorique et des avancées de nature pratique. Mais le nombre des problèmes et l'intérêt du secteur industriel ont été si grands que la connaissance acquise montre encore beaucoup de lacunes, çà et là, qui restent à combler, tant sur le plan mathématique et numérique que sur le plan physique. Du côté numérique, les flammes turbulentes proposent des problèmes nouveaux plutôt en ce qui concerne les méthodes Lagrangiennes statistiques que dans les méthodes Euleriennes classiques. Des problèmes mathématiques de base, d'existence et d'unicité, restent aussi ouverts... Du côté physique, la modélisation des échanges turbulents recèle encore des mystères, et il reste à se pencher sur le cas des écoulements turbulents réactifs à plusieurs phases...

References

- [1] La modélisation de la combustion. *Image des mathématiques*, CNRS, 1996.
- [2] A. FAVRE, L.S.G. KOVASNAY, R. DUMAS, J. GAVIGLIO, M. COANTIC. *La turbulence en mécanique des fluides : bases théoriques et expérimentales*. Gauthier-Villars, Paris, 1976.
- [3] R. SCHIESTEL. *Les écoulements turbulents*, 2ème éd., Hermès, Paris, 1998.
- [4] R. BORGHI, M. DESTRIAU, G. DE SOETE. *La combustion et les flammes*. Editions Technip, Paris, 1995.
- [5] T. MANTEL, R. BORGHI. *Combustion and flame*, **96**, 1994, 443-457.
- [6] D. VEYNANTE, F. LACAS, S. CANDEL. AIAA paper n° 890487, 1989.
- [7] A.N. KOLMOGOROV, I.G. PETROVSKII, N.S. PISTUNOV. *Byul. Mosk. Gos. Univ., Sek. A*, **16**, 1937.
- [8] U. MAAS ET S.B. POPE. *Combustion and flame*, **88**, 1992, 239-264.
- [9] C. DOPAZO. Recent developments in PDF methods. In P.A. LIBBY, F.A. WILLIAMS, editors, *Turbulent Reacting Flows*, 2nd ed., 1996.
- [10] S.B. POPE. *Progress in energy and combustion sciences*, **11**, 1985, 119-192.
- [11] R. BORGHI, F. DUPOIRIEUX, B. ZAMUNER, F. GALZIN, T. MANTEL. Recent progress in the modelling of turbulent combusting flows. In M. GIOT, F. MAYINGER, G.P. CELATA, editors, *Experimental heat transfer, Fluid mechanics and Thermodynamics*. Edizioni ETS, 1997, 2589-2602.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t}(\rho) + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\rho U_\alpha) &= 0 \\
 \frac{\partial}{\partial t}(\rho Y_i) + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\rho U_\alpha Y_i) - \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(J_\alpha^i) &= \rho \dot{W}_i(\dots) \\
 \frac{\partial}{\partial t}(\rho U_\beta) + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\rho U_\alpha U_\beta) + \frac{\partial p}{\partial x_\beta} - \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\tau_{\alpha\beta}) &= \rho F_\beta(\dots) \\
 \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}(\rho h_t) + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\rho U_\alpha h_t) - \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(J_\alpha^Q + \sum_i h_i J_\alpha^i + \tau_{\alpha\beta} U_\beta)}_{E(\rho, \rho \underline{u}, \rho \underline{Y}, h_t)} &= \underbrace{\rho F_\beta U_\beta}_{\rho F_\beta U_\beta} + \frac{\partial p}{\partial t} \\
 &= S(\dots) \\
 \therefore h_t = h + \frac{1}{2} U_\alpha U_\alpha = e + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} U_\alpha U_\alpha
 \end{aligned}$$

Tableau I

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\bar{u}_\alpha) &= 0 \\
 \frac{\partial}{\partial t}\rho\bar{u}_\beta + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\rho\bar{u}_\alpha\bar{u}_\beta) + \frac{\partial}{\partial x_\beta}\bar{p} - \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\bar{\tau}_{\alpha\beta} + \rho\overline{u'_\alpha u'_\beta}) &= 0 \\
 \frac{\partial}{\partial t}(\rho\bar{k}) + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\rho\bar{u}_\alpha\bar{k}) - \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\rho\frac{\nu t}{S_{ck}}\frac{\partial\bar{k}}{\partial x_\alpha}\right) &= \rho P_k - \rho\bar{\epsilon} \\
 \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}(\rho\bar{\epsilon}) + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\rho\bar{u}_\alpha\bar{\epsilon}) - \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\rho\frac{\nu t}{S_{c\epsilon}}\frac{\partial\bar{\epsilon}}{\partial x_\alpha}\right)}_{E_{k\epsilon}(\bar{u}_\beta, \bar{p}, \bar{k}, \bar{\epsilon})} &= \underbrace{\rho\frac{\bar{\epsilon}}{\bar{k}}(C_1 P_k - C_2 \bar{\epsilon})}_{S_{k\epsilon}(\dots)}
 \end{aligned}$$

avec $\overline{u'_\alpha u'_\beta} - \frac{2}{3}k\delta_{\alpha\beta} = -C_u\frac{k^2}{\epsilon}\left(\frac{\partial\bar{u}_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial\bar{u}_\beta}{\partial x_\alpha}\right)$

$$P_k = -\overline{u'_\alpha u'_\beta}\frac{\partial\bar{u}_\alpha}{\partial x_\beta}$$

(ici $\rho = c^{ste}$)

Tableau II

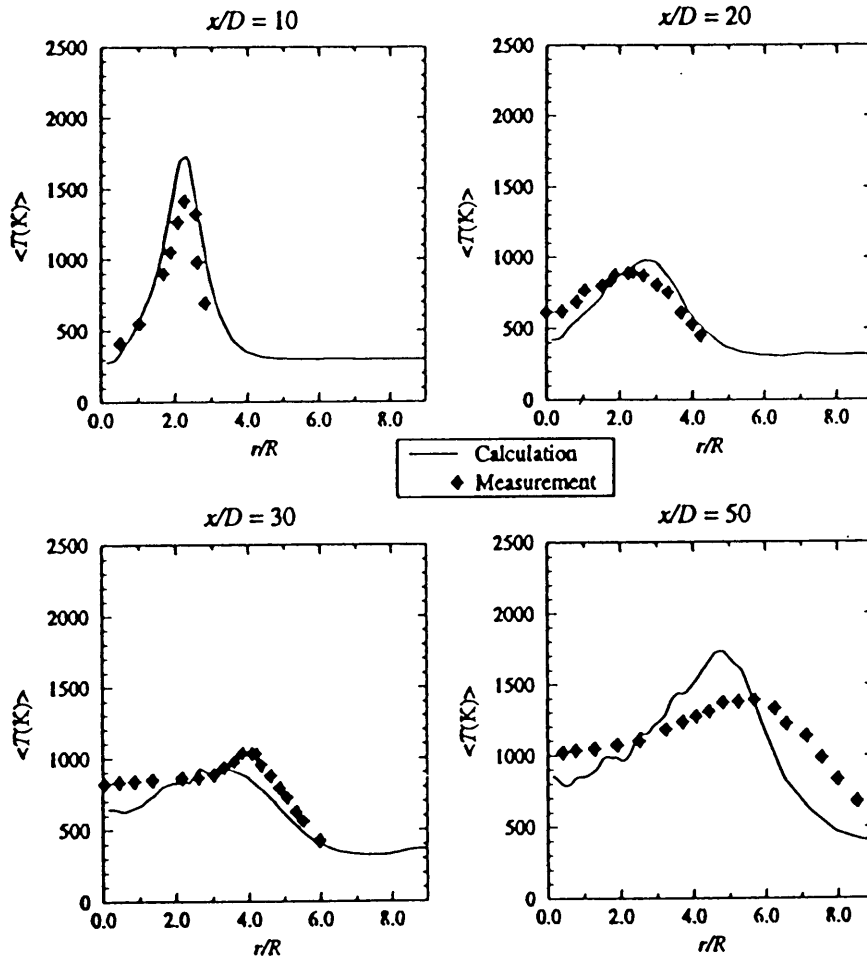


Figure 1: Profils transversaux de température moyenne dans la flamme. Le jet de méthane est dans la direction x , avec un diamètre $D = 2R$, et l'air est autour, dans la même direction

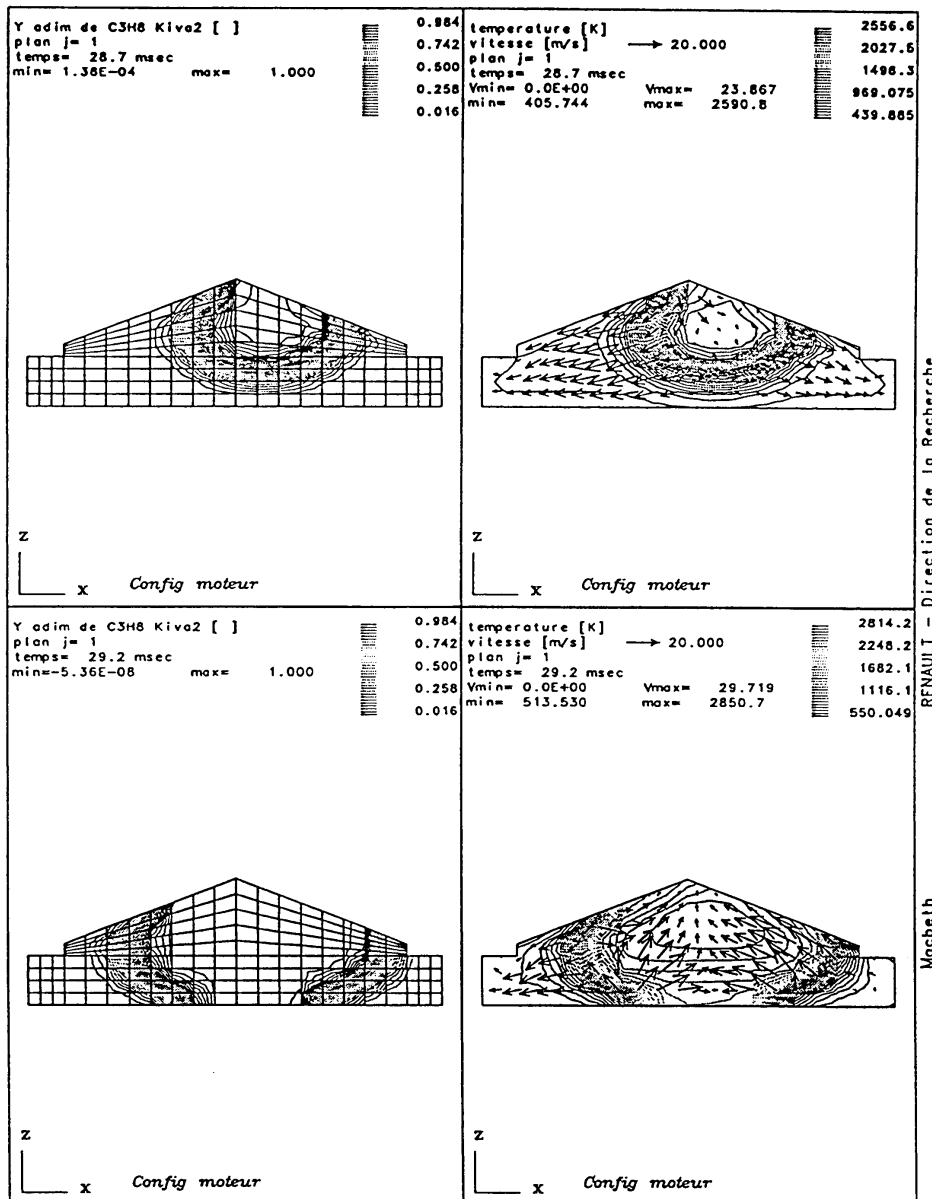


Figure 2: Champ moyen de fraction massique adimensionnée, de vitesse et de température