ESAIM: Proceedings
Actes du 30ème Congrès
d'Analyse Numérique : CANum'98
URL: http://www.emath.fr/proc/Vol.6/

Vol. 6, Septembre 1998, 13-17

JUSTIFICATION DES EQUATIONS DES COQUES MINCES LINEAIREMENT ELASTIQUES

Philippe G. CIARLET

Résumé. On fait le point sur les résultats de convergence récemment obtenus pour justifier les modèles bi-dimensionnels de coques linéairement élastiques.

Mots clés. Elasticité - Théorie des coques

Abstract. *We review recently obtained convergence results that justify two-dimensional linear shell models.*

Keywords. *Elasticity - Shell theory*

AMS Subject Classifications. 35J, 73C

L'analyse asymptotique des coques minces linéairement élastiques est relativement récente. Après le travail fondamental de Goldenveizer [14], un premier progrès considérable fut la thèse de Destuynder [12], où la convergence pour les coques "membranaires" était "presque" prouvée; un autre progrès considérable est dû à Sanchez-Palencia [23], qui montra clairement comment la méthode des développements asymptotiques formels conduit à des modèles bi-dimensionnels, *soit* de coques "membranaires", *soit* de coques "en flexion", la distinction provenant *uniquement* de la *géométrie de la surface moyenne* de la coque *et* des *conditions aux limites* (voir aussi Caillerie & Sanchez-Palencia [4] et Miara & Sanchez-Palencia [20]).

Puis Ciarlet & Lods [6, 7] et Ciarlet, Lods & Miara [10] ont obtenu les *théorèmes de convergence*, dont l'ensemble constitue une analyse asymptotique des coques linéairement élastiques qui couvre *tous les cas.* C'est cette analyse que l'on résume très brièvement ci-après. On en trouvera une description détaillée dans Ciarlet [5].

On considère une *famille de coques linéairement élastiques* d'*épaisseur* 2ε, où $\varepsilon > 0$ *est destiné à tendre vers zéro*, toutes formées du *même* matériau homogène et isotrope de constantes de Lamé $\lambda > 0$ et $\mu > 0$, ayant toutes la *même* surface moyenne $S = \boldsymbol{\theta}(\overline{\omega}) \subset \mathbb{R}^3$, où $\omega \subset \mathbb{R}^2$ est un ouvert borné connexe de frontière γ lipschitzienne et où $\boldsymbol{\theta} \in \mathcal{C}^3(\overline{\omega}; \mathbb{R}^3)$. Les coques sont *encastrées* sur une portion de leur surface latérale dont la ligne moyenne est $\boldsymbol{\theta}(\gamma_0)$, où γ_0 est une partie *fixée* de γ, de longueur > 0. On désigne par

$$\gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta}) = \frac{1}{2}(\partial_\alpha \eta_\beta + \partial_\beta \eta_\alpha) - \Gamma^\sigma_{\alpha\beta}\eta_\sigma - b_{\alpha\beta}\eta_3$$

les composantes covariantes du *tenseur linéarisé de changement de métrique de* S, où $\Gamma^{\sigma}_{\alpha\beta}$ sont les symboles de Christoffel de S et $b_{\alpha\beta}$ sont les composantes covariantes du tenseur de courbure de S.

On suppose *pour commencer* que l'*espace des déplacements inextensionnels linéarisés* (introduit par Sanchez-Palencia [21]) :

$$\boldsymbol{V}_F(\omega) = \{\boldsymbol{\eta} = (\eta_i) \in H^1(\omega) \times H^1(\omega) \times H^2(\omega); \\ \eta_i = \partial_\nu \eta_3 = 0 \text{ sur } \gamma_0,\ \gamma_{\alpha\beta}(\eta) = 0 \text{ dans } \omega\}$$

contient d'autres fonctions que la fonction nulle. Alors Ciarlet, Lods & Miara [10] ont établi que, si la densité des forces de volume appliquées est en $O(\varepsilon^2)$ par rapport à ε (on suppose pour simplifier qu'il n'y a pas de forces de surface), le champ $\boldsymbol{u}(\varepsilon) = (u_i(\varepsilon))$, où $u_i(\varepsilon)$ désignent les trois composantes covariantes du déplacement des points de la coque "mises à l'échelle" afin d'être définies sur l'ouvert fixe $\Omega = \omega \times]-1, 1[$, converge dans $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ lorsque $\varepsilon \to 0$, vers une limite $\boldsymbol{\zeta} = (\zeta_i)$ indépendante de la variable "transverse". Cette limite qui peut donc être identifiée à une fonction définie sur $\overline{\omega}$, appartient à l'espace $\boldsymbol{V}_F(\omega)$ et elle résout les *équations bi-dimensionnelles d'une coque "en flexion"* :

$$\frac{1}{3}\int_\omega a^{\alpha\beta\sigma\tau}\rho_{\sigma\tau}(\boldsymbol{\zeta})\rho_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta})\sqrt{a}\,d\omega = \int_\omega \left\{\int_{-1}^{1} f^i\,dx_3\right\}\eta_i\sqrt{a}\,d\omega$$

pour tout $\boldsymbol{\eta} = (\eta_i) \in \boldsymbol{V}_F(\omega)$, où

$$a^{\alpha\beta\sigma\tau} = \frac{4\lambda\mu}{\lambda+2\mu}a^{\alpha\beta}a^{\sigma\tau} + 2\mu(a^{\alpha\sigma}a^{\beta\tau} + a^{\alpha\tau}a^{\beta\sigma})$$

sont les composantes contravariantes du *tenseur d'élasticité "bi-dimensionnel"* de la coque, les fonctions $a^{\alpha\beta}$ désignant les composantes contravariantes du tenseur métrique de S,

$$\begin{aligned}\rho_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta}) &= \partial_{\alpha\beta}\eta_3 - \Gamma^{\sigma}_{\alpha\beta}\partial_\sigma\eta_3 + b^{\sigma}_{\beta}(\partial_\alpha\eta_\sigma - \Gamma^{\tau}_{\alpha\sigma}\eta_\tau) \\ &\quad + b^{\sigma}_{\alpha}(\partial_\beta\eta_\sigma - \Gamma^{\tau}_{\beta\sigma}\eta_\tau) + (\partial_\alpha b^{\tau}_{\beta} + \Gamma^{\tau}_{\alpha\sigma}b^{\sigma}_{\beta} - \Gamma^{\sigma}_{\alpha\beta}b^{\tau}_{\sigma})\eta_\tau - c_{\alpha\beta}\eta_3\end{aligned}$$

sont les composantes covariantes du *tenseur linéarisé de changement de courbure de* S, b^{β}_{α} sont les composantes mixtes du tenseur de courbure de S, $\sqrt{a}\,dy$ est l'élément d'aire le long de S, et f^i désignent les composantes contravariantes "mises à l'échelle" des forces de volume appliquées. *Si* $\boldsymbol{V}_F(\omega) \neq \{\boldsymbol{0}\}$*, les équations bi-dimensionnelles d'une coque "en flexion" sont donc justifiées.*

Un *premier* exemple où $\boldsymbol{V}_F(\omega) = \{\boldsymbol{0}\}$ est celui où la surface S est "elliptique" (sa courbure de Gauss est partout > 0) et où, *simultanément*, $\gamma_0 = \gamma$. Dans ce cas, Ciarlet & Lods [6] ont montré que, si la densité des forces de volume appliquées est en $O(1)$ par rapport à ε, le champ $\boldsymbol{u}(\varepsilon) = (u_i(\varepsilon))$ converge dans $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ lorsque $\varepsilon \to 0$, vers une limite $\boldsymbol{\zeta} = (\zeta_i)$ indépendante de la variable "transverse". Cette limite, qui peut donc être identifiée à une fonction définie sur $\overline{\omega}$, appartient à l'espace

$$\boldsymbol{V}_M(\omega) = H^1_0(\omega) \times H^1_0(\omega) \times L^2(\omega),$$

et elle résout les *équations bi-dimensionnelles d'une coque "membranaire"* :

$$B_M(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) \stackrel{\text{déf}}{=} \int_\omega a^{\alpha\beta\sigma\tau}\gamma_{\sigma\tau}(\boldsymbol{\zeta})\gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta})\sqrt{a}\,d\omega = \int_\omega \left\{\int_{-1}^{1} f^i dx_3\right\}\eta_i\sqrt{a}\,d\omega$$

pour tout $\boldsymbol{\eta} = (\eta_i) \in \boldsymbol{V}_M(\omega)$, les fonctions $a^{\alpha\beta\sigma\tau}$, $\gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta})$, a, et f^i étant définies comme ci-dessus. *Si S est elliptique et $\gamma_0 = \gamma$, les équations bi-dimensionnelles d'une coque "membranaire" sont donc justifiées.*

Ciarlet & Lods [8] ont enfin étudié *tous les cas "restants" où $\boldsymbol{V}_F(\omega) = \{\boldsymbol{0}\}$* (de nombreuses situations correspondant à ces cas "restants" ont été identifiées par Mardare [19], Lods & Mardare [18], et Slicaru [25]). Considérons (pour fixer les idées, ce cas étant le plus "courant" parmi les cas restants) le cas où la semi-norme

$$|\cdot|_\omega^M : \boldsymbol{\eta} = (\eta_i) \to |\boldsymbol{\eta}|_\omega^M = \left\{\sum_{\alpha,\beta} \|\gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta})\|^2_{L^2(\omega)}\right\}^{1/2}$$

est une norme sur l'espace

$$\boldsymbol{V}(\omega) = \{\boldsymbol{\eta} \in \boldsymbol{H}^1(\omega);\, \boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{0} \text{ sur } \gamma_0\}.$$

Alors, si les forces appliquées sont "admissibles" (dans un sens précis, mais "technique") et si elles sont à nouveau en $O(1)$ par rapport à ε, la *moyenne* $\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\boldsymbol{u}(\varepsilon)\,dx_3$ (x_3 est la variable "transverse") converge lorsque $\varepsilon \to 0$ dans l'espace

$$\boldsymbol{V}_M^\sharp(\omega) = \text{ complétion de } \boldsymbol{V}(\omega) \text{ par rapport à } |\cdot|_\omega^M.$$

De plus, la limite $\boldsymbol{\zeta} \in \boldsymbol{V}_M^\sharp(\omega)$ résout les *équations bi-dimensionnelles d'une coque "membranaire généralisée"* :

$$B_M^\sharp(\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\eta}) = L_M^\sharp(\boldsymbol{\eta}) \text{ pour tout } \boldsymbol{\eta} \in \boldsymbol{V}_M^\sharp(\omega),$$

où $B_M^\sharp$ est l'extension unique de $B_M : \boldsymbol{V}(\omega)\times\boldsymbol{V}(\omega) \to \mathbb{R}$ à l'espace $\boldsymbol{V}_M^\sharp(\omega)\times\boldsymbol{V}_M^\sharp(\omega)$ (c'est en ce sens qu'il s'agit de coques membranaires "généralisées") et où $L_M^\sharp : \boldsymbol{V}(\omega) \to \mathbb{R}$ est une forme linéaire continue *ad hoc*, déterminée par le comportement des forces "admissibles" lorsque $\varepsilon \to 0$.

Il est à noter que les problèmes variationnels correspondant aux coques "membranaires généralisées" constituent des exemples de *problèmes "sensitifs"* introduits par Lions & Sanchez-Palencia [16, 17].

Dans chacun des trois cas considérés ci-dessus, les théorèmes de convergence font (entre autres!) un usage essentiel d'*inégalités de Korn sur une surface.* La première, valable pour une *surface "générale"* et pour une partie γ_0 de γ de longueur > 0 *quelconque*, est due à Bernadou & Ciarlet [1] (voir aussi les améliorations ultérieures dues à Bernadou, Ciarlet & Miara [2] et Blouza & Le Dret [3]). Elle s'énonce ainsi : Il existe une constante c_1 telle que

$$\left\{\sum_\alpha \|\eta_\alpha\|^2_{H^1(\omega)} + \|\eta_3\|^2_{H^2(\omega)}\right\}^{1/2} \leq c_1\left\{\sum_{\alpha,\beta}\|\gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta})\|^2_{L^2(\omega)} + \sum_{\alpha,\beta}\|\rho_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta})\|^2_{L^2(\omega)}\right\}^{1/2}$$

pour tout champ $\boldsymbol{\eta} = (\eta_i) \in H^1(\omega) \times H^1(\omega) \times H^2(\omega)$ vérifiant $\eta_i = \partial_\nu \eta_3 = 0$ sur γ_0.

La seconde, valable *si et seulement si la surface S est elliptique et $\gamma_0 = \gamma$* (Slicaru [24] a en effet établi que ces deux conditions sont également nécessaires pour qu'une telle inégalité ait lieu), est due à Ciarlet & Lods [9] et Ciarlet & Sanchez-Palencia [11] (les hypothèses de régularité sur l'application $\boldsymbol{\theta}$ ont été ultérieurement affaiblies par Lods & Mardare [18]). Elle s'énonce ainsi : Il existe une constante c_2 telle que

$$\left\{ \sum_\alpha \|\eta_\alpha\|^2_{H^1(\omega)} + \|\eta_3\|^2_{L^2(\omega} \right\}^{1/2} \leq c_2 \left\{ \sum_{\alpha,\beta} \|\gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta})\|^2_{L^2(\omega)} \right\}^{1/2}$$

pour tout champ $\boldsymbol{\eta} = (\eta_i) \in \boldsymbol{V}_M(\omega)$.

Enfin, Ciarlet & Lods [7] ont montré comment l'analyse asymptotique des coques "en flexion", "membranaire", et "membranaire généralisée", combinée à des résultats antérieurs de Destuynder [13] et Sanchez-Palencia [21, 22], permet de justifier complètement le *modèle bi-dimensionnel de Koiter* [15] pour les coques linéairement élastiques.

Références

[1] M. Bernadou, P. G. Ciarlet. Sur l'ellipticité du modèle linéaire de coques de W. T. Koiter. In R. Glowinski & J. L. Lions, editors, *Computing Methods in Applied Sciences and Engineering* Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems. **134**, Springer-Verlag, Heidelberg, 1976, 89-136.

[2] M. Bernadou, P. G. Ciarlet, B. Miara. Existence theorems for two-dimensional linear shell theories. *J. Elasticity*, **34**, 1994, 645-667.

[3] A. Blouza, H. Le Dret. Existence and uniqueness for the linear Koiter model for shells with little regularity. To appear in *Quart. Appl. Math.*, 1998.

[4] D. Caillerie, E. Sanchez-Palencia. Elastic thin shells: Asymptotic theory in the anisotropic and heteregeneous cases. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, **5**, 1995, 473-496.

[5] P. G. Ciarlet. *Mathematical Elasticity, Volume III: Theory of Shells.* North-Holland, Amsterdam, 1998.

[6] P. G. Ciarlet, V. Lods. Asymptotic analysis of linearly elastic shells. I. Justification of membrane shell equations. *Arch. Rational Mech. Anal.*, **136**, 1996, 119-161.

[7] P. G. Ciarlet, V. Lods. Asymptotic analysis of linearly elastic shells. III. Justification of Koiter's shell equations. *Arch. Rational Mech. Anal.*, **136**, 1996, 191-200.

[8] P. G. Ciarlet, V. Lods. Asymptotic analysis of linearly elastic shells: "Generalized membrane shells". *J. Elasticity*, **43**, 1996, 147-188.

[9] P. G. Ciarlet, V. Lods. An existence and uniqueness theorem for the two-dimensional linear membrane shell equations. *J. Math. Pures Appl.*, **35**, 1996, 51-67.

[10] P. G. Ciarlet, V. Lods, B. Miara. Asymptotic analysis of linearly elastic shells. II. Justification of flexural shell equations. *Arch. Rational Mech. Anal.*, **136**, 1996, 163-190.

[11] P. G. CIARLET, E. SANCHEZ-PALENCIA. On the ellipticity of linear membrane shell equations. *J. Math. Pures Appl.*, **75**, 1996, 107-124.

[12] P. DESTUYNDER. *Sur une Justification des Modèles de Plaques et de Coques par les Méthodes Asymptotiques*, Doctoral Dissertation. Université Pierre et Marie Curie, Paris, 1980.

[13] P. DESTUYNDER. A classification of thin shell theories. *Acta Applicandæ Mathematicæ*, **4**, 1985, 15-63.

[14] A. L. GOLDENVEIZER. Derivation of an approximate theory of shells by means of asymptotic integration of the equations of the theory of elasticity. *Prikl. Mat. Mech.*, **27**, 1963, 593-608.

[15] W. T. KOITER. On the foundations of the linear theory of thin elastic shells. *Proc. Kon. Ned. Akad. Wetensch*, **73**-B, 1970, 169-195.

[16] J.L. LIONS, E. SANCHEZ-PALENCIA. Problèmes aux limites sensitifs. *C.R. Acad. Sci. Paris, Sér. I*, **319**, 1994, 1021-1026.

[17] J. L. LIONS, E. SANCHEZ-PALENCIA. Sur quelques espaces de la théorie des coques et la sensitivité. In D. CIORANESCU, A. DAMLAMIAN & P. DONATO, editors, *Homogenization and Applications to Material Sciences*, Gakkotosho, Tokyo, 1997, 271-278.

[18] V. LODS, C. MARDARE. Détermination de l'espace inextensionnel d'une coque linéairement élastique, partiellement encastrée et de surface moyenne uniformément elliptique. *C.R. Acad. Sci. Paris, Sér. I*, **324**, 1997, 1315-1320.

[19] C. MARDARE. *Analyse Asymptotique et Modèles Bi-Dimensionnels des Coques Linéairement Rigides*, Doctoral Dissertation. Université Pierre et Marie Curie, Paris, 1997.

[20] B. MIARA, E. SANCHEZ-PALENCIA. Asymptotic analysis of linearly elastic shells. *Asymptotic Anal.*, **12**, 1996, 41-54.

[21] E. SANCHEZ-PALENCIA. Statique et dynamique des coques minces. I. Cas de flexion pure non inhibée. *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I*, **309**, 1989, 411-417.

[22] E. SANCHEZ-PALENCIA. Statique et dynamique des coques minces. II. Cas de flexion pure inhibée - Approximation membranaire. *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I*, **309**, 1989, 531-537.

[23] E. SANCHEZ-PALENCIA. Passage à la limite de l'élasticité tri-dimensionnelle à la théorie asymptotique des coques minces. *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. II*, **311**, 1990, 909-916.

[24] S. SLICARU. On the ellipticity of the middle surface of a shell and its application to the asymptotic analysis of "membrane shells". *J. Elasticity*, **46**, 1997, 33-42.

[25] S. SLICARU. *Quelques Résultats dans la Théorie des Coques Linéairement Elastiques à Surface Moyenne Uniformément Elliptique ou Compacte sans Bord.* Doctoral Dissertation, Université Pierre et Marie Curie, Paris, 1998.

Institut Universitaire de France
Université Pierre et Marie Curie

http://www.admp6.jussieu.fr/