

À QUOI RESSEMBLE UN PLANISPHERE VRAIMENT ALÉATOIRE ?

NICOLAS CURIEN¹

Abstract. An illustrated introduction to the theory of random planar maps.

Cartes planaires.

Saisissez-vous d'une feuille de papier et d'un crayon. Sur la page blanche, placez quelques points (appelés sommets) et reliez-les par des routes (appelées arêtes) avec la condition que deux arêtes ne peuvent pas se croiser¹ et que les routes permettent d'aller de n'importe quel sommet à n'importe quel autre. Votre croquis peut également représenter un planisphère où des pays imaginaires (les faces) sont délimités par des frontières (les arêtes). Le concept mathématique correspondant à ce type de dessins est d'ailleurs nommé d'après cette analogie : vous venez de dessiner *une carte planaire*.

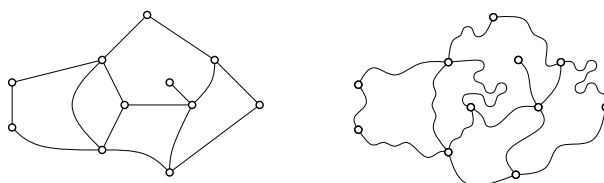


Figure 1. Deux représentations de la même carte planaire.

En réalité, une même carte planaire correspond à plusieurs dessins différents : tout tracé qui peut être déformé (continûment) en votre croquis représente la même carte, voir Fig. 1 ci-dessus. Un peu comme si les frontières séparant les pays (les faces) étaient faites de caoutchouc déformable.

Deux résultats “enfantins”.

Les cartes planaires ont des propriétés fascinantes. Par exemple, dans votre carte comptez le nombre de sommets, ajoutez-y le nombre de faces (y compris la face extérieure) et soustrayez le nombre d'arêtes. Vous devez obtenir 2 indépendamment de la carte dessinée. Ce fait prouvé par Euler en 1758 constitue l'un des premiers résultats sur les cartes planaires. Donnons un autre théorème qui paraît simple : il est possible de colorier n'importe quelle carte planaire avec seulement 4 couleurs (disons rouge, bleu, vert et jaune) tel que deux faces adjacentes (des pays limitrophes) aient des couleurs différentes. Malgré les apparences, ce théorème est très difficile à prouver et la démonstration originale d'Appel et Haken datant de 1976 est encore l'objet de débats car elle fait appel à l'ordinateur : comment *prouver* que le programme informatique ne comporte pas d'erreur et que l'ordinateur effectue bien les calculs demandés ? Les cartes planaires interviennent dans de nombreux domaines des mathématiques en particulier en combinatoire où elles sont encore aujourd'hui l'objet d'actives recherches.

¹ CNRS et Université Paris 6. LPMA, 4 place Jussieu 75005 Paris. E-mail: nicolas.curien@gmail.com

¹interdiction de construire des ponts !

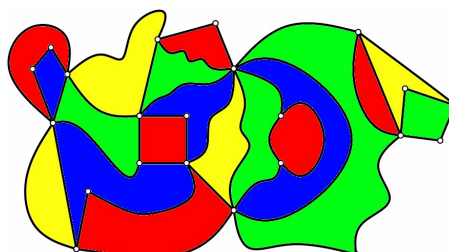


Figure 2. Quatre couleurs suffisent à colorier n'importe quelle carte. Remarquez que l'on peut colorier la face extérieure en bleu sans enfreindre la règle.

Un modèle de géométrie aléatoire.

À la fin du siècle dernier et pour des raisons liées à la mécanique quantique, les physiciens théoriciens ont proposé l'idée que les cartes planaires peuvent être vues comme des modèles de géométrie aléatoire. Expliquons ceci. L'ensemble des cartes planaires à n arêtes² est un ensemble fini, plus précisément de cardinal [7]

$$c_n = \frac{2 \cdot 3^n}{(n+2)(n+1)} \binom{2n}{n}.$$

Pour $n \geq 1$, choisissez *au hasard* une carte planaire C_n à n arêtes uniformément parmi tous les c_n choix possibles, c'est-à-dire que chaque carte à n arêtes a la même probabilité d'être sélectionnée. Cette carte aléatoire C_n va maintenant être considérée comme un modèle géométrique en la munissant de la distance de graphe : la distance entre deux sommets u et v de la carte est définie comme le plus petit nombre d'arêtes à traverser pour aller de u à v . En d'autres termes, chaque arête est vue comme ayant pour longueur 1.

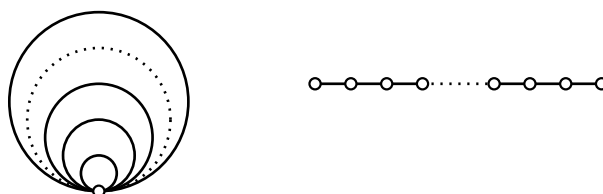


Figure 3. Deux cartes à n arêtes avec diamètre 0 (à gauche) et n (à droite).

Le but est maintenant de comprendre les propriétés à grande échelle de notre espace métrique aléatoire C_n quand n tend vers l'infini. Étudions par exemple son diamètre Δ_n , c'est-à-dire la distance maximale entre deux sommets de la carte C_n . Bien entendu Δ_n est une quantité aléatoire et peut varier en principe entre 0 et n (voir Fig. 3). Dans un article maintenant célèbre, Chassaing et Schaeffer [1] ont montré qu'avec une probabilité écrasante quand $n \rightarrow \infty$, la variable aléatoire Δ_n est de l'ordre de $n^{1/4}$,

$$\Delta_n \approx n^{1/4}. \tag{1}$$

L'exposant $1/4$ est surprenant et très différent du $1/2$ auquel on s'attend si l'on pense à des cartes "régulières" comme la grille du cahier d'écolier. D'autres propriétés de ces espaces métriques aléatoires peuvent être étudiées, comme les géodésiques, c'est-à-dire les plus courts chemins ou "autoroutes". En termes simples et forcément simplistes, la géométrie d'une carte planaire aléatoire est proche de celle d'une feuille de papier froissée ou d'une région montagneuse : les autoroutes passent toutes par un nombre restreint de plis ou vallées, voir Fig.4.

Tous ces résultats laissent suggérer qu'il existe une "limite continue", une surface aléatoire qui serait

²pour les puristes, nous considérerons à partir de maintenant les cartes comme enracinées, c'est-à-dire munies d'une arête orientée distinguée

obtenue (en un certain sens que nous ne précisons pas) en divisant toutes les longueurs dans C_n par $n^{1/4}$ et en faisant tendre n vers l'infini. Ce résultat remarquable fut prouvé³ l'année dernière indépendamment par Jean-François Le Gall [3] et par Grégory Miermont [5]. L'espace aléatoire limite est appelé la *Carte Brownienne* : c'est une surface continue aléatoire qui peut être vue comme la sphère de dimension 2 munie d'une métrique aléatoire qui laisse sa topologie inchangée mais la transforme en un objet fractal de dimension 4.

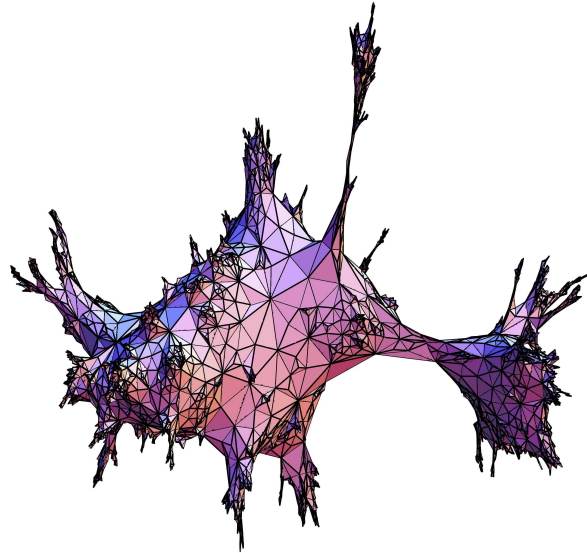


Figure 4. Une représentation (non fidèle) dans \mathbb{R}^3 d'une grande carte (triangulation) aléatoire : une géométrie hérissée de piques !

Les cartes sont des arbres étiquetés.

Terminons ce bulletin par la présentation d'une bijection combinatoire magique appelée Cori-Vauquelin-Schaeffer du nom de ses inventeurs [2, 6] et qui est l'outil principal pour étudier les cartes planaires aléatoires.

Commençons par remarquer qu'à toute carte planaire à n arêtes on peut associer une carte planaire à n faces où toutes les faces ont quatre côtés⁴, on parlera de quadrangulation, voir Fig. 5 et 8. La méthode est claire sur un dessin : dans chaque face de la carte planaire initiale, placez un sommet blanc que vous reliez à tous les sommets adjacents de la face. Après avoir effacé la carte initiale vous obtenez une quadrangulation où chaque face correspond à une arête de la carte initiale, voir Fig. 5.

Avec ce procédé (réversible !) on transforme n'importe quelle carte à n faces en une quadrangulation à n arêtes. Nous allons maintenant voir que les quadrangulations ne sont rien d'autre que des arbres étiquetés. Nous appellerons arbre (pour arbre orienté enraciné), un arbre généalogique avec un ancêtre, puis les enfants de cet ancêtre ordonnés (du benjamin vers l'aîné, de gauche à droite) et ainsi de suite. Un étiquetage de cet arbre est une fonction sur les sommets de l'arbre à valeurs dans \mathbb{Z} tel que l'étiquette de l'ancêtre est 0 et tel que deux sommets voisins (l'un est le père de l'autre) ont des étiquettes qui diffèrent de 1 de 0 ou de -1 , voir Fig. 6.

Derrière un arbre étiqueté à n arêtes comme celui présenté dans la Fig. 6 se cache une quadrangulation à n faces. La voyez-vous ? Pour la découvrir nous allons démarrer de la racine de l'arbre et faire son contour dans le sens des aiguilles d'une montre, c'est-à-dire tourner autour de l'arbre en imaginant que c'est un mur, voir Fig. 6 droite. Lors de ce contour, tous les sommets de l'arbre sont visités et certains

³pour une classe particulière de cartes planaires où toutes les faces sont des quadrangles, voir plus loin.

⁴chaque face est bordée par 4 arêtes avec la convention suivante : si une arête est complètement incluse dans une face, elle compte double

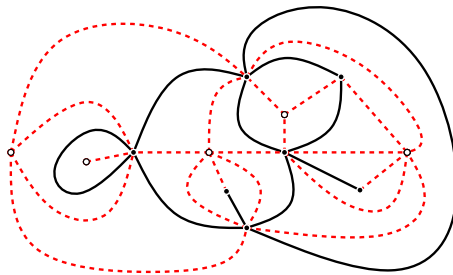


Figure 5. Dualité entre cartes à n (lignes pleines) arêtes et quadrangulations à n faces (lignes pointillées).

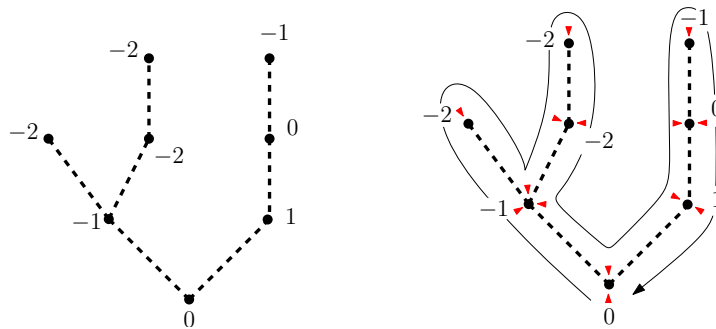


Figure 6. Un arbre étiqueté, son contour et ses coins.

sommets sont rencontrés plus d’une fois, chacune de ces rencontres correspond à un *coin* différent du sommet (coin rouge dans la Fig. 6 droite). Le procédé pour construire la quadrangulation cachée est le suivant : chaque coin d’étiquette i est relié au prochain coin dans le contour d’étiquette $i - 1$. Sur notre exemple, le premier coin est associé à un sommet d’étiquette 0 et sera donc relié au prochain coin dans le parcours d’étiquette -1 .

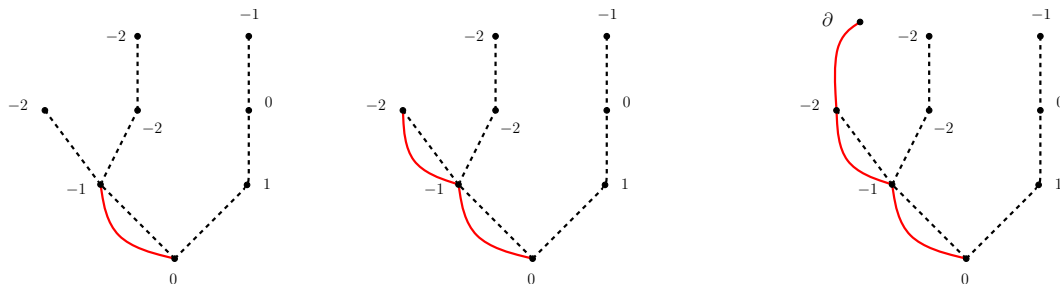


Figure 7. Les trois premières arêtes dans la construction de Schaeffer. La troisième nécessite l’introduction du sommet ∂ .

Mais il y a un hic : que faire avec les coins d’étiquette minimale (-2 dans notre exemple) puisqu’il n’y a pas de coin d’étiquette strictement inférieure dans la suite du contour ? La solution est de relier tous ces coins à un sommet fictif ∂ placé en dehors de l’arbre. Il est alors possible de vérifier que toutes les arêtes peuvent être tracées sans croisement et qu’après effacement de l’arbre initial le dessin obtenu... est une quadrangulation !

Grâce à cette construction l’étude des cartes planaires aléatoires est alors “ramenée” à l’étude des arbres étiquetés aléatoires qui sont beaucoup plus simples à comprendre. On peut vérifier par exemple (faites-le sur la Fig. 8) que si v est un sommet de l’arbre d’étiquette $\ell(v)$ alors la distance de graphe entre

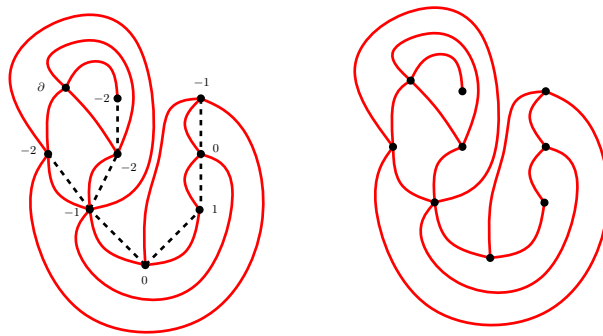


Figure 8. La quadrangulation finale avec et sans son arbre étiqueté

v et ∂ dans la quadrangulation associée est égale à

$$d_{\text{gr}}(v, \partial) = \ell(v) - \min \ell + 1,$$

où $\min \ell$ est la plus petite étiquette de l'arbre. Ainsi les distances dans la quadrangulation sont intimement liées aux étiquettes de l'arbre associé. Cela permet de comprendre l'apparition du mystérieux facteur $n^{1/4}$ dans (1) : un arbre uniforme à n arêtes a grosso-modo une hauteur d'ordre \sqrt{n} et le long de chaque branche de cet arbre les étiquettes évoluent comme des marches aléatoires atteignant donc des valeurs d'ordre $\sqrt{\sqrt{n}} = n^{1/4}$... ! Pour plus de détails sur le sujet nous renvoyons le lecteur au cours de Jean-François Le Gall et Grégory Miermont [4].

REFERENCES

- [1] P. Chassaing and G. Schaeffer. Random planar lattices and integrated superBrownian excursion. *Probab. Theory Related Fields*, 128(2):161–212, 2004.
- [2] R. Cori and B. Vauquelin. Planar maps are well labeled trees. *Canad. J. Math.*, 33(5):1023–1042, 1981.
- [3] J.-F. Le Gall. Uniqueness and universality of the Brownian map. *Ann. Probab.* (to appear).
- [4] J.-F. Le Gall and G. Miermont. Scaling limits of random trees and planar maps. *Lecture notes for the Clay Mathematical Institute Summer School in Buzios*, July 11 - August 7, 2010.
- [5] G. Miermont. The Brownian map is the scaling limit of uniform random plane quadrangulations. *Acta Math.* (to appear).
- [6] G. Schaeffer. Conjugaison d'arbres et cartes combinatoires aléatoires. phd thesis. 1998.
- [7] W. T. Tutte. A census of planar maps. *Canad. J. Math.*, 15:249–271, 1963.