

INTRODUCTION AUX ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES STOCHASTIQUES

LUDOVIC GOUDENÈGE¹

Abstract. Le but de ces notes de cours est relativement simple, il s'agit de montrer comment aborder les équations aux dérivées partielles stochastiques en tant qu'objet infini-dimensionnel dérivant d'un système d'équations différentielles stochastiques en démarrant avec des notions simples sur la modélisation de perturbations aléatoires dans un système physique.

Ces notes n'ont pas la prétention d'être exhaustives sur le domaine, ni même novatrices, mais simplement de donner les premières idées nécessaires à la manipulation des objets impliqués, sans demander non plus trop de pré-requis. Certaines démonstrations ou points techniques sont donc laissés de côté afin de ne pas perturber le fil conducteur. Le lecteur intéressé pourra s'orienter vers les cours de Hairer [5], Pardoux [7], Prévôt et Röckner [8], les livres de Da Prato et Zabczyk [2, 3] qui contiennent des détails et extensions, ou encore les notes de Bréhier disponibles sur Hal [1]. Je remercie Charles-Édouard Bréhier pour ses conseils. Des extensions bien plus complexes peuvent être consultées dans [4] ou [6].

Ces notes font suite aux cours d'«Introduction aux équations différentielles et aux équations aux dérivées partielles stochastiques» que j'ai donnés entre 2016 et 2024 à CentraleSupélec. Je remercie les élèves de CentraleSupélec qui ont assisté à mes cours. Ils ont été attentifs et vigilants, m'aidant à corriger plusieurs des erreurs ou imprécisions rencontrées durant les heures passées en classe.

BIBLIOGRAPHIE DU RÉSUMÉ

- [1] Charles-Édouard Bréhier. A short introduction to Stochastic PDEs. <https://hal.science/hal-00973887>
- [2] Giuseppe Da Prato and Jerzy Zabczyk. Ergodicity for Infinite Dimensional Systems. London Mathematical Society Lecture Note Series. Cambridge University Press, 1996.
- [3] Giuseppe Da Prato and Jerzy Zabczyk. Stochastic Equations in Infinite Dimensions. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge University Press, 2nd edition, 2014.
- [4] Massimiliano Gubinelli, Peter Imkeller, and Nicolas Perkowski. Paracontrolled distributions and singular PDEs. Forum Math. Pi, 3:75, 2015.
- [5] Martin Hairer. An Introduction to Stochastic PDEs. Technical report, The University of Warwick / Courant Institute, 2009. Available at: <http://hairer.org/notes/SPDEs.pdf>
- [6] Martin Hairer. A theory of regularity structures. Inventiones mathematicae, 198(2):269–504, 2014.
- [7] Étienne Pardoux. Stochastic Partial Differential Equations - an introduction. Springer, 2021
- [8] Claudia Prévôt and Michael Röckner. A concise course on stochastic partial differential equations. Springer, 2007.

¹ Fédération de Mathématiques de CentraleSupélec, CNRS FR3487, Université Paris-Saclay, France; e-mail: goudenège@math.cnrs.fr

CONTENTS

Bibliographie du résumé	139
1. Quelques problèmes liés au monde aléatoire	141
1.1. Introduction	141
1.2. Mesurabilité et lois finies-dimensionnelles	141
1.3. Premier exemple de processus stochastique	144
1.4. Exercices sur le chapitre 1	147
2. Intégrale d'Itô et calcul stochastique	149
2.1. Processus représentant le bruit	149
2.2. Formule d'Itô	150
2.3. Équations différentielles stochastiques	152
2.4. Exercices sur le chapitre 2	154
3. Intégration contre un processus de Wiener cylindrique	157
3.1. Processus de Wiener cylindrique	157
3.2. Intégrale stochastique contre un processus de Wiener cylindrique	159
3.3. Exercices sur le chapitre 3	161
4. ÉDP stochastiques linéaires avec bruit additif	163
4.1. Semi-groupe pour les équations aux dérivées partielles linéaires	163
4.2. Semi-groupe pour les ÉDP stochastiques linéaires dirigées par un bruit blanc espace-temps	165
4.3. L'équation de la chaleur stochastique sur le cube avec des conditions de Dirichlet homogènes dirigée par un bruit blanc espace-temps	166
4.4. Exercices sur le chapitre 4	168
5. ÉDP stochastiques linéaires avec bruit multiplicatif	169
5.1. Intégrale stochastique contre une martingale dans un espace de Hilbert	169
5.2. Exercices sur la Sous-section 5.1	172
5.3. Approche variationnelle pour les équations aux dérivées partielles linéaires	173
5.4. Approche variationnelle pour les équations aux dérivées partielles stochastiques linéaires avec bruit multiplicatif	176
5.5. Suite des exercices sur le chapitre 5	182
6. Conclusion et perspectives	182
Bibliographie	183

1. QUELQUES PROBLÈMES LIÉS AU MONDE ALÉATOIRE

1.1. Introduction

On cherche à donner un sens à des équations impliquant une notion de bruit. Un exemple simple (peut-être le plus simple même) basé sur un modèle de croissance de population mène à une équation de la forme suivante:

$$\frac{dN(t)}{dt} = r(t)N(t), \quad N(0) = N_0,$$

où $N(t)$ est la taille de la population à l'instant $t \in \mathbb{R}_+$ et $N_0 \in \mathbb{R}$ une taille initiale. Le taux de croissance r est sujet à des fluctuations qui suggèrent de l'écrire sous la forme :

$$r(t) = \bar{r}(t) + \text{“bruit”},$$

où \bar{r} représente la partie sans fluctuations aléatoires.

Étant donné un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, on peut modéliser ce bruit à l'aide d'une famille $\{W(t, \omega)\}_{t \in \mathbb{R}_+, \omega \in \Omega}$ et on cherche à construire une famille $\{N(t, \omega)\}_{t \in \mathbb{R}_+, \omega \in \Omega}$ qui vérifierait :

$$\frac{dN(t, \omega)}{dt} = (\bar{r}(t) + W(t, \omega))N(t, \omega), \quad N(0, \omega) = N_0(\omega), \tag{1}$$

avec N_0 une variable aléatoire réelle, et ω représente un “tirage” aléatoire permettant d'obtenir un bruit $W(t, \omega)$ qui dépend du temps t .

Toute personne qui débute en théorie des probabilités est nécessairement confrontée à la nécessité de définir une propriété minimale attendue pour parler de “variables aléatoires”.

Le tirage ω semble être un paramètre, alors résoudre l'Équation (1) pour tout $\omega \in \Omega$ revient à résoudre la famille d'équations différentielles ordinaires (1) pour tout paramètre ω dans un univers Ω (fini ou infini, dénombrable ou non-dénombrable, peu importe puisqu'on ne demande rien de plus sur Ω si ce n'est d'être muni d'une tribu et d'une mesure de probabilités).

À chaque $\omega \in \Omega$, en supposant par exemple que $t \mapsto W(t, \omega)$ et $t \mapsto \bar{r}(t)$ sont des fonctions continues, on peut appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz, et il existe une unique solution maximale à chaque équation décrite par l'Équation (1). La famille de solutions est même donnée explicitement par la formule

$$N(t, \omega) = N_0(\omega) \exp \left(\int_0^t (\bar{r}(s) + W(s, \omega)) ds \right),$$

et tout est correctement défini. Chaque tirage ω , chaque “bruit”, donne une unique solution, et si on associe une probabilité p_ω au paramètre ω , alors on peut calculer des moyennes, des variances, etc. La Figure 1 illustre une représentation de trajectoires aléatoires qu'on pourrait obtenir.

Tout ceci fonctionne très bien dans le cas où le nombre de possibilités est fini, ou alors en admettant qu'on sache moyenner une infinité de nombres, via des séries ou des intégrales, voire même des intégrales de chemin à la Feynman pour les plus physiciens. D'ailleurs, les physiciens aiment bien noter $\langle N(t) \rangle$ une telle valeur moyenne en supprimant mentalement la dépendance en le paramètre ω . À partir de là, si on veut raisonnablement moyenner une infinité possible de valeurs, la mesurabilité par rapport à ω va certainement jouer un rôle, et la moyenne est l'espérance par rapport à la mesure \mathbb{P} . Dans la prochaine section, on va explorer cette notion de mesurabilité.

1.2. Mesurabilité et lois finies-dimensionnelles

Comme on s'en doutait en introduisant le concept de variables aléatoires, la première difficulté consiste en la mesurabilité de la famille infinie $\{N(t, \omega)\}_{t \in \mathbb{R}_+, \omega \in \Omega}$. On rappelle deux notions essentielles de la mesurabilité.

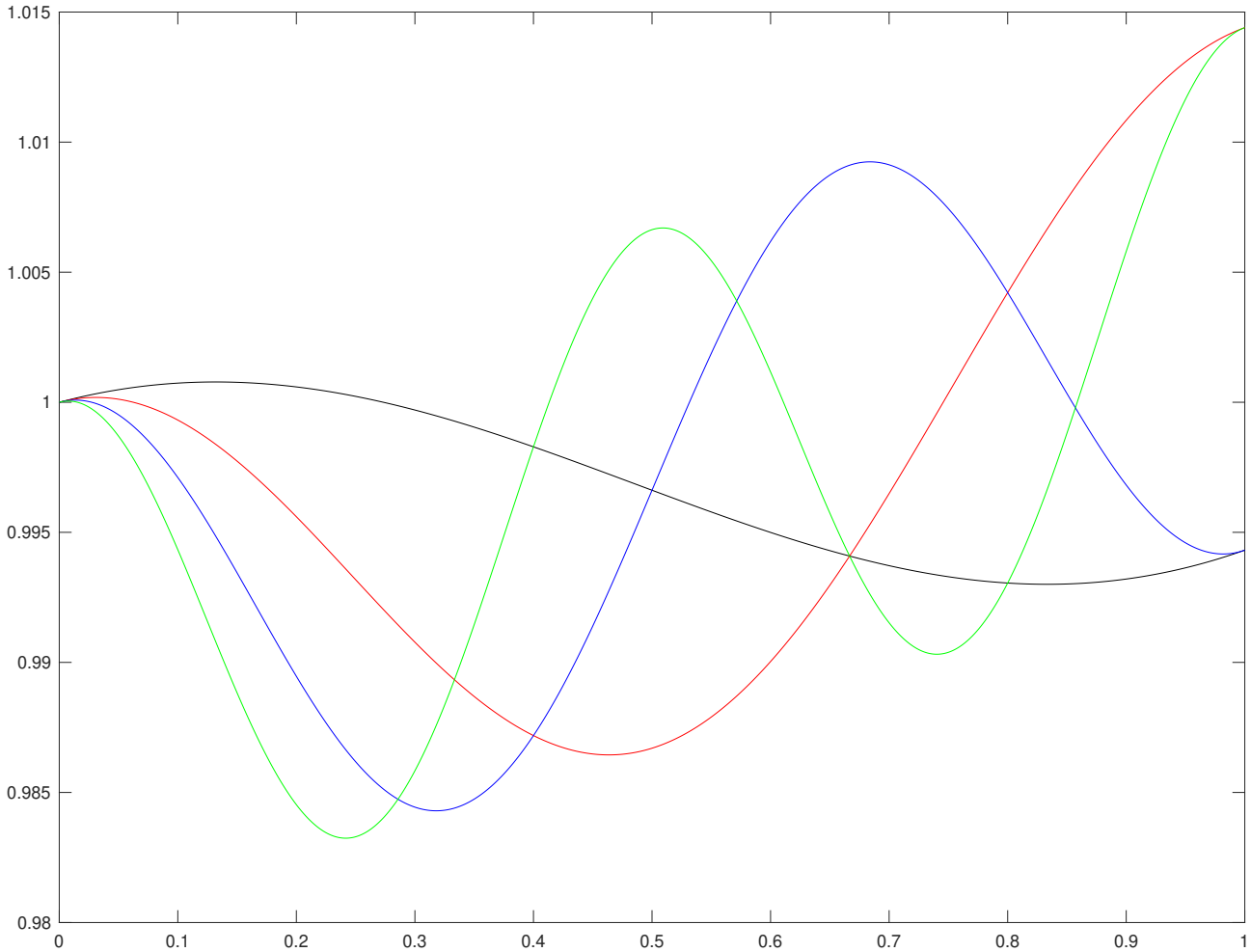


FIGURE 1. Quatre évolutions aléatoires possibles avec $\bar{r}(t) = 0.012 + 0.005 \sin(t)$ et $\int_0^t W(s, \omega) ds = 0.01 \cos(\omega\pi t)$ avec ω prenant les valeurs 1 (noir), 2 (rouge), 3 (bleu) ou 4 (vert) de manière équiprobable.

Définition 1.1. Soit un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$. On dit que Y est une variable aléatoire à valeurs dans $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ si Y est \mathcal{F} -mesurable, c'est-à-dire si pour tout borélien $U \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$

$$Y^{-1}(U) := \{\omega \in \Omega : Y(\omega) \in U\} \in \mathcal{F}.$$

L'ensemble $\mathcal{H}_Y := \{Y^{-1}(U) \in \mathcal{P}(\Omega) : U \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ est en réalité la plus petite tribu rendant Y mesurable, on l'appelle la tribu engendrée par Y .

De cette définition suit un principe essentiel parfois appelé le lemme de Doob-Dynkin (voir Lemme 2.1.2 dans [Ok03]).

Lemme 1.2. Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, alors Y est \mathcal{H}_X -mesurable si et seulement si il existe une fonction borélienne g telle que $Y = g(X)$.

La mesurabilité est donc stable par transformation borélienne, et si on considère une quantité finie d'instants $(t_1, \dots, t_k) \in \mathbb{R}_+^k$, on peut tout à fait parler de la mesurabilité de la famille $\{N(t, \omega)\}_{t \in \{t_1, \dots, t_k\}, \omega \in \Omega}$. Mais

comme on souhaite introduire dans l'Équation (1) la dérivée de N par rapport à la variable t , il nous faut une collection infinie d'instants. On parle alors non plus d'une variable aléatoire mais d'un processus stochastique.

Définition 1.3. *Un processus stochastique X est la donnée d'une famille de variables aléatoires à valeurs dans $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ indexées sur un ensemble \mathcal{T} . On le note*

$$X := \{X_t\}_{t \in \mathcal{T}}.$$

En règle générale et particulièrement dans ces notes, l'ensemble \mathcal{T} est un intervalle de la forme $[0, T]$ ou encore \mathbb{R}_+ . À chaque t fixé, on a donc une variable aléatoire $X_t : \omega \mapsto X_t(\omega)$. Et pour chaque $\omega \in \Omega$ fixé, on a accès à une fonction réelle $t \mapsto X_t(\omega)$ qu'on appelle une trajectoire du processus. Il est assez intuitif de considérer t comme le temps, et ω comme un évènement, un tirage ou une particule. À un processus stochastique X pour $\mathcal{T} = \mathbb{R}_+$, on peut bien sûr associer la famille doublement indexée

$$\{X(t, \omega)\}_{t \in \mathbb{R}_+, \omega \in \Omega}$$

telle que $X(t, \omega) = X_t(\omega)$. Les deux notations coexistent dans la littérature, mais on réserve parfois l'usage de l'une ou l'autre suivant la mesurabilité attendue. Dans toute la suite de ce cours, on considère que l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est complété, c'est-à-dire que la tribu \mathcal{F} contient tous les négligeables. Précisément si \mathbb{P}^* est la mesure extérieure, on suppose que \mathcal{F} contient tous les sous-ensembles G de Ω tels que

$$\mathbb{P}^*(G) := \inf\{\mathbb{P}(F) \in \mathbb{R} : F \in \mathcal{F}, G \subset F\} = 0.$$

Remarque 1.4. *Tout espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ peut-être complété, en ajoutant dans \mathcal{F} les ensembles négligeables, et en étendant la définition de \mathbb{P} à cette nouvelle tribu générée.*

Comme on travaille avec une famille indexée par une infinité de temps possibles, on peut se demander si on peut caractériser les lois de la famille si on ne prend qu'un nombre fini de temps possibles. Cette notion est ce qu'on appelle les lois finies-dimensionnelles.

Définition 1.5. *On appelle les lois finies-dimensionnelles du processus stochastique X la donnée des mesures μ_{t_1, \dots, t_k} sur $(\mathbb{R}^d)^k$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, pour tout k -uplet $(t_1, \dots, t_k) \in \mathcal{T}^k$ telle que*

$$\mu_{t_1, \dots, t_k}(F_1 \times \dots \times F_k) = \mathbb{P}(X_{t_1} \in F_1, \dots, X_{t_k} \in F_k),$$

où les $\{F_i\}_{i=1, \dots, k}$ sont des boréliens quelconques de \mathbb{R}^d .

Il est important de comprendre que la donnée des lois finies-dimensionnelles du processus stochastique permet de déterminer certaines propriétés de X , mais qu'il n'y a pas unicité des trajectoires (voir Exercice 1.4). Toutefois, étant donnée une famille de mesures satisfaisant certaines propriétés évidentes de compatibilité, on peut prouver l'existence d'un processus stochastique X possédant cette famille comme lois finies-dimensionnelles. C'est un théorème fondamental dû à Kolmogoroff (voir Théorème 2.1.5 dans [Eva98]).

Théorème 1.6. *Soit une famille de mesures ν_{t_1, \dots, t_k} sur $(\mathbb{R}^d)^k$, définie pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, pour tout k -uplet $(t_1, \dots, t_k) \in \mathcal{T}^k$ qui vérifie les deux "conditions de compatibilités" suivantes:*

$$\nu_{t_{\sigma(1)}, \dots, t_{\sigma(k)}}(F_1 \times \dots \times F_k) = \nu_{t_1, \dots, t_k}(F_{\sigma^{-1}(1)} \times \dots \times F_{\sigma^{-1}(k)})$$

pour toute permutation σ sur $\{1, \dots, k\}$ et

$$\nu_{t_1, \dots, t_k}(F_1 \times \dots \times F_k) = \nu_{t_1, \dots, t_k, t_{k+1}, \dots, t_{k+m}}(F_1 \times \dots \times F_k \times \underbrace{\mathbb{R}^d \times \dots \times \mathbb{R}^d}_{m \text{ fois}})$$

pour tout $m \in \mathbb{N}$.

Alors il existe un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et un processus stochastique X tels que la famille de mesures ν représente les lois finies-dimensionnelles de X i.e.

$$\nu_{t_1, \dots, t_k}(F_1 \times \dots \times F_k) = \mathbb{P}(X_{t_1} \in F_1, \dots, X_{t_k} \in F_k),$$

où les $(F_i)_{i=1, \dots, k}$ sont des boréliens quelconques de \mathbb{R}^d .

1.3. Premier exemple de processus stochastique

Le premier exemple fondamental de processus stochastique est le mouvement Brownien, également appelé processus de Wiener. Nous verrons plus tard pourquoi, d'un point de vue de la modélisation, il est intéressant de considérer cet objet, et d'en développer une théorie.

Il existe de multiples manières de le définir (on pourra notamment consulter les ouvrages [Kah85], [KS91], [LG16]), mais de notre point de vue, il suffira d'en donner les lois finies-dimensionnelles pour l'exhiber à l'aide du Théorème 1.6. On pose pour tout $t > 0$, pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}^d)^2$ la fonction gaussienne

$$p(t, x, y) = (2\pi t)^{-d/2} \exp\left(-\frac{\|x - y\|^2}{2t}\right).$$

On peut alors définir une famille de mesures $\nu_{t_1, \dots, t_k}^{(x)}$ sur $(\mathbb{R}^d)^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout k -uplet $(t_1, \dots, t_k) \in (\mathbb{R}_+)^k$ tels que $0 < t_1 < \dots < t_k$, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ avec la formule

$$\nu_{t_1, \dots, t_k}^{(x)}(F_1 \times \dots \times F_k) := \int_{F_1 \times \dots \times F_k} p(t_1, x, y_1) \cdots p(t_k - t_{k-1}, y_{k-1}, y_k) dy_1 \cdots dy_k.$$

On étend ensuite la définition de la famille de mesures à tout k -uplet $(t_1, \dots, t_k) \in (\mathbb{R}_+)^k$ (donc sans la condition de croissance des instants) pour assurer la première relation de compatibilité sur les permutations du Théorème 1.6. Et puisque $\int_{\mathbb{R}^d} p(t, x, y) dy = 1$ pour tout $t > 0$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, on a bien la deuxième relation de compatibilité du Théorème 1.6. Fixons $x \in \mathbb{R}^d$, par le Théorème 1.6 on a l'existence d'un espace de probabilité $(\Omega^{(x)}, \mathcal{F}^{(x)}, \mathbb{P}^{(x)})$ et d'un processus stochastique $B^{(x)}$ dont les lois finies-dimensionnelles sont données par la formule

$$\mathbb{P}^{(x)}(B_{t_1}^{(x)} \in F_1, \dots, B_{t_k}^{(x)} \in F_k) = \int_{F_1 \times \dots \times F_k} p(t_1, x, y_1) \cdots p(t_k - t_{k-1}, y_{k-1}, y_k) dy_1 \cdots dy_k$$

pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout k -uplet $(t_1, \dots, t_k) \in (\mathbb{R}_+)^k$ tels que $0 < t_1 < \dots < t_k$.

Définition 1.7. On appelle mouvement brownien démarrant en x un processus stochastique défini par la formule précédente sur ses lois finies-dimensionnelles.

Il est clair qu'il n'y a pas unicité des trajectoires dans cette définition, mais on peut toutefois travailler avec de tels processus. En particulier ce sont des processus Gaussiens, c'est-à-dire que, notant G la variable aléatoire $(B_{t_1}^{(x)}, \dots, B_{t_k}^{(x)})$ sur \mathbb{R}^{dk} , cette variable G est un vecteur Gaussien de moyenne

$$(x_1, \dots, x_d, x_1, \dots, x_d, \dots, x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^{dk}$$

et de matrice de covariance de taille $dk \times dk$ définie par blocs

$$\begin{pmatrix} t_1 I_d & t_1 I_d & \dots & t_1 I_d \\ t_1 I_d & t_2 I_d & \dots & t_2 I_d \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_1 I_d & t_2 I_d & \dots & t_k I_d \end{pmatrix}$$

où I_d est la matrice identité de taille $d \times d$. On retrouve alors les propriétés classiques à savoir pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on a

$$\mathbb{E}^{(x)}[B_t^{(x)}] = x, \quad \mathbb{E}^{(x)}[\|B_t^{(x)} - x\|^2] = d t,$$

et pour tout $(s, t) \in (\mathbb{R}_+)^2$, on a

$$\mathbb{E}^{(x)}[\langle B_t^{(x)} - x, B_s^{(x)} - x \rangle] = d \min(s, t).$$

D'où on tire pour tout $(s, t) \in (\mathbb{R}_+)^2$ que

$$\mathbb{E}^{(x)}[\|B_t^{(x)} - B_s^{(x)}\|^2] = d |t - s|.$$

On obtient également que les incréments $B_{t_1}^{(x)}, B_{t_2}^{(x)} - B_{t_1}^{(x)}, \dots, B_{t_k}^{(x)} - B_{t_{k-1}}^{(x)}$ sont indépendants (en tant que vecteur Gaussien, il suffit de voir qu'ils sont non-corrélés). En effet pour $k \neq i$, on a

$$\mathbb{E}^{(x)}[\langle B_{t_{k+1}}^{(x)} - B_{t_k}^{(x)}, B_{t_{i+1}}^{(x)} - B_{t_i}^{(x)} \rangle] = 0.$$

En particulier pour $(t, s) \in (\mathbb{R}_+)^2$, dès que $t > s$, la variable $B_t^{(x)} - B_s^{(x)}$ est indépendante de la tribu $\mathcal{F}_s^{(x)}$ engendrée par la famille de variables aléatoires $B_r^{(x)}$ pour $0 \leq r \leq s$.

Enfin, et pour conclure cette introduction du mouvement Brownien, on peut montrer qu'il existe une modification (on parle aussi de version) du mouvement Brownien qui est continue à l'aide d'un autre théorème dû à Kolmogoroff (voir [Kol31] ou [RY99, Theorem 1.8]). Dans la suite de ce cours, on considèrera la modification continue du mouvement Brownien et, lorsqu'on construira des objets, on s'attardera à vérifier qu'ils possèdent une modification continue, afin de toujours travailler dans l'espace des processus à trajectoires continues.

Définition 1.8. *Pour deux processus stochastiques X et Y définis sur l'espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, on dit que Y est une modification (ou une version) de X si*

$$\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X_t(\omega) = Y_t(\omega)\}) = 1, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+.$$

Ils ont alors les mêmes lois finies-dimensionnelles, mais pas forcément les mêmes trajectoires (voir Exercice 1.4).

Cette propriété de continuité est en réalité un atout essentiel pour éviter des problèmes de mesurabilité jointe, c'est-à-dire la mesurabilité par rapport à t et ω simultanément (et non par rapport à ω à t fixé). En effet on a la proposition suivante :

Proposition 1.9. *Soit X un processus stochastique à valeur dans \mathbb{R}^d défini sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ indexé par \mathbb{R}_+ . Supposons que X est presque sûrement à trajectoires continues, i.e. pour presque tout $\omega \in \Omega$, $t \mapsto X_t(\omega)$ est continue, alors*

$$Y : \begin{array}{ll} (\mathbb{R}_+ \times \Omega, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}) & \rightarrow (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)) \\ (t, \omega) & \mapsto X_t(\omega), \end{array}$$

est mesurable (par rapport au couple (t, ω) de ses deux variables, et non plus par rapport à ω à t fixé en tant que variable aléatoire), c'est-à-dire

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \quad Y^{-1}(B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}.$$

Proof. Soit $n \in \mathbb{N}$, on note $X^n : (t, \omega) \mapsto X_{\frac{k}{2^n}}(\omega)$ si $t \in [\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}[$ pour $k \in \mathbb{N}$ ou encore

$$X^n(t, \omega) = \sum_{k=0}^{+\infty} X_{\frac{k}{2^n}}(\omega) \mathbb{1}_{[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}[}(t),$$

qui est mesurable par rapport au couple (t, ω) de ses deux variables comme somme et produit dénombrable de variables aléatoires. Le processus X étant à trajectoires continues, on a bien pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, en posant $t_n = \frac{\lfloor 2^n t \rfloor}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} t$, que la variable $X^n(t, \cdot) = X_{t_n}(\cdot) = Y(t_n, \cdot)$ converge presque sûrement vers X_t quand $n \rightarrow +\infty$. La limite simple de fonctions mesurables étant mesurable, on a la mesurabilité de Y par rapport au couple (t, ω) de ses deux variables. \square

Remarque 1.10. *Dans la démonstration précédente, l'ensemble à t fixé sur lequel la convergence a lieu presque sûrement ne dépend pas de t . En réalité, s'il en dépendait, on pourrait encore s'en sortir en ne considérant que les instants t rationnels et en prenant l'intersection dénombrable des ensembles où a lieu la convergence. La continuité permettrait encore de conclure que cet ensemble convient pour tous les instants t .*

Partant de ce constat, si on se restreint à ne considérer que des versions continues, on peut noter indifféremment $\{X_t\}_{t \in \mathcal{T}} := \{\omega \mapsto X_t(\omega)\}_{t \in \mathcal{T}}$ ou $\{X(t, \omega)\}_{t \in \mathcal{T}, \omega \in \Omega}$ la donnée d'un processus stochastique. On notera même de manière synthétique X la donnée d'un tel processus.

On possède maintenant une notion de mesurabilité, et des solutions exactes d'équations stochastiques de la forme (1), et si W est la version continue d'un processus stochastique (comme un mouvement Brownien par exemple), alors la solution N est également la version d'un processus continu. Et on obtient un objet bien défini, solution d'une équation avec du "bruit". On peut très souvent en calculer les lois finies-dimensionnelles, par exemple dans le cas Gaussien si on connaît les corrélations de W , et donc les variances entre deux instants, i.e. les variances des incréments. De plus, on peut se convaincre que ce choix de fluctuations est un très bon point de départ, car le mouvement Brownien est un objet universel, dans le sens où, sous des hypothèses relativement générales, toute somme de beaucoup de perturbations aléatoires de carré intégrable, sous la bonne renormalisation, tend vers une fluctuation brownienne. La Figure 2 représente des trajectoires continues du mouvement Brownien.

Mais en réalité le problème n'est pas là. Il est dans l'interprétation de ce qu'on appelle un "bruit". On attend d'un bruit qu'il ait une forme de stationnarité : le bruit aujourd'hui, ou demain, ou dans la pièce à côté est sensiblement le même. Si vos voisins font la fête un soir, et que cela ne se répète pas chaque soir, ou que d'autres voisins n'entendent rien pour corroborer vos faits, cela va être difficile de prétendre qu'ils font du "bruit".

Deuxièmement, on attend d'un bruit qu'il soit indépendant du bruit du lendemain ou d'hier ou d'il y a cinq minutes. Par exemple cela se produit si on n'entend pas de corrélation ou de mélodie évidente dans un signal sonore. Si votre voisin répète ses gammes de trompette, alors, avec un peu d'indulgence, on peut comprendre qu'il ne fait pas de "bruit". Si au contraire le petit Matéo frappe sur la batterie de son père sans cohérence, c'est du "bruit".

Et c'est là que tout s'effondre, car il n'existe pas de famille raisonnable $W(t, \omega)$ indexée par le temps $t \in \mathbb{R}_+$ et un univers Ω assez riche, tel que W satisfasse ces deux propriétés.

Si de plus on demande la possibilité de pouvoir en calculer la variance, c'est-à-dire commencer à faire des statistiques sur ce "bruit", alors on peut même perdre la mesurabilité de W par rapport à la tribu naturelle $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \times \mathcal{F}$ (voir Proposition 1.9). Souvenez-vous qu'on a pu caractériser des lois finies-dimensionnelles avec simplement la donnée des variances des incréments. Si on perd la notion de variance ou de co-variance, la suite risque de s'avérer très difficile.

La fonction $(t, \omega) \mapsto W(t, \omega)$ n'étant alors pas mesurable, elle n'est évidemment pas continue en ses paramètres. Les solutions $N(t, \omega)$ agitées par ce genre de "bruit" perdent tout sens physique puisque toute incertitude de mesure sur le bruit, aussi faible soit-elle, risque de produire des variations infiniment grandes dans le signal recherché. On parlerait alors de dynamique chaotique où le simple battement d'une aile de... on connaît la suite.

On verra dans le prochain chapitre comment construire un bon processus de "bruit", et pourquoi la forme de l'Équation (1) va être modifiée en une "équation différentielle stochastique" dont la résolution théorique sera bien plus difficile, mais également bien plus riche mathématiquement.

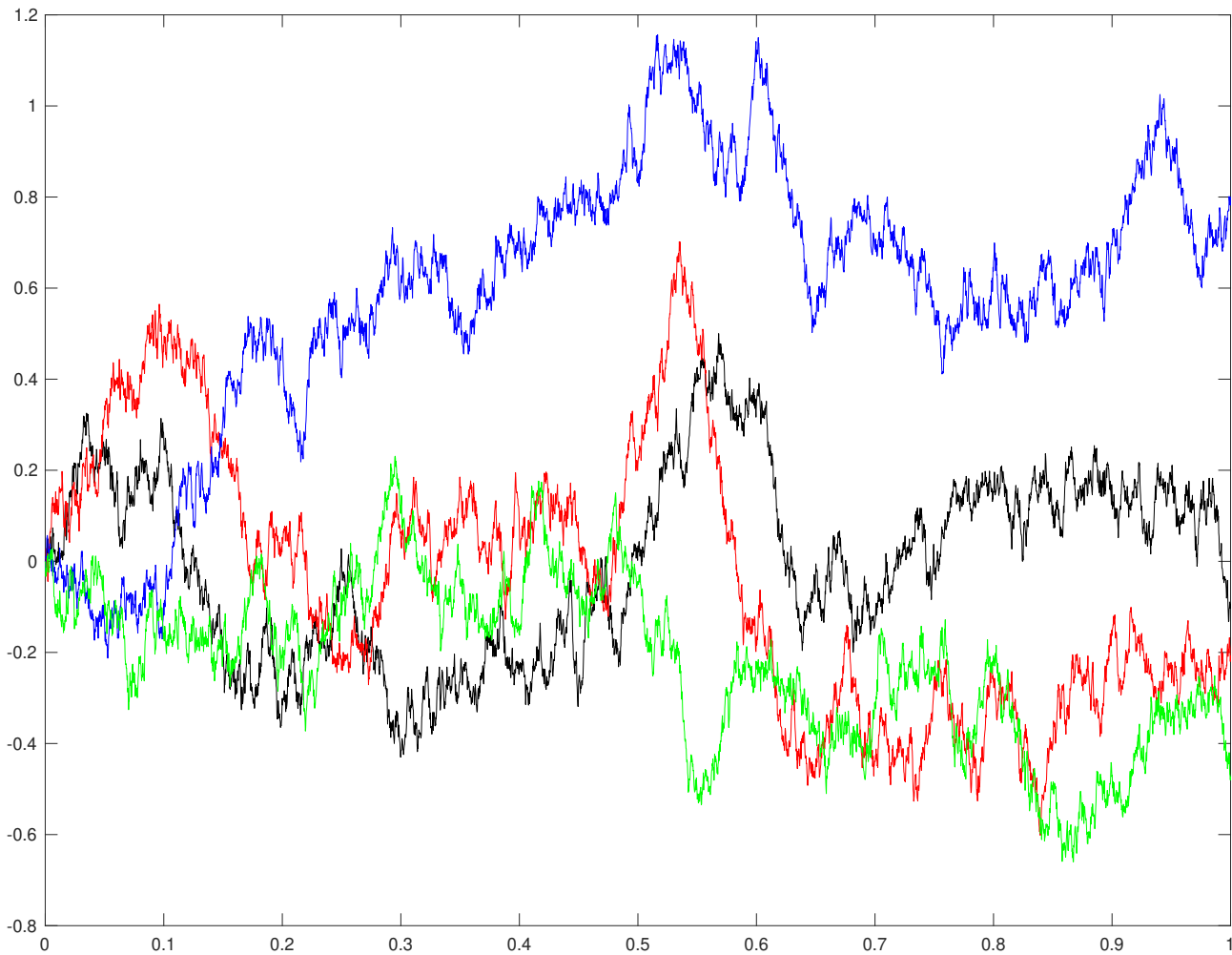


FIGURE 2. Des trajectoires continues du mouvement Brownien. Les couleurs représentent des tirages indépendants.

1.4. Exercices sur le chapitre 1

Exercice 1.1. Montrer que la loi de $B_t^{(0)}$ en dimension $d = 1$, pour tout $t > 0$, est donnée par la densité

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right).$$

Quelle est la loi de $(B_t^{(0)})^2$ pour tout $t > 0$?

Exercice 1.2. Montrer que pour tout $u \in \mathbb{R}$, pour tout $t \geq 0$, on a en dimension $d = 1$

$$\mathbb{E} \left[\exp\left(iuB_t^{(0)}\right) \right] = \exp\left(-\frac{1}{2}u^2t\right).$$

Exercice 1.3. Vérifier qu'en dimension $d = 1$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a pour tout $t \geq 0$

$$\mathbb{E} \left[\left(B_t^{(0)} \right)^{2k} \right] = \frac{(2k)!}{2^k k!} t^k.$$

Exercice 1.4. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = (\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+), \mu)$ où μ est une mesure de probabilité sur \mathbb{R}_+ qui ne charge pas les singletons. On définit les processus X et Y par leurs trajectoires pour $t \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $\omega \in \mathbb{R}_+$

$$X_t(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } t = \omega, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad \text{et} \quad Y_t(\omega) = 0.$$

Montrer que les lois finies-dimensionnelles de X et Y sont les mêmes, en montrant que X et Y sont versions l'un de l'autre.

2. INTÉGRALE D'ITÔ ET CALCUL STOCHASTIQUE

2.1. Processus représentant le bruit

Comme expliqué dans le chapitre précédent, on demande naturellement à ce qu'un "bruit" satisfasse les propriétés suivantes :

- (i) $t \neq s$ implique W_t est indépendant de W_s ,
- (ii) la loi de W_t est stationnaire, (*a fortiori* la loi de W_{t+r} est indépendante de r).
- (iii) $\mathbb{E}[W_t] = 0$.

Le problème est qu'il n'existe aucun processus raisonnable qui satisfasse ces propriétés. Formellement on remarque toutefois que W semble proche d'une dérivée du mouvement Brownien. En effet, les conditions demandées sur les instants de W se transposent sur les incréments d'un mouvement Brownien $B^{(0)}$ démarrant au point $x = 0$ qu'on notera simplement B . On obtient en effet la liste suivante de propriétés demandées :

- (i) $t \neq s$ implique $B_t - B_s$ est indépendant de $B_s - B_0$,
- (ii) la loi de $B_t - B_s$ est stationnaire, (ici la loi de $B_{t+r} - B_{s+r}$ est indépendante de r),
- (iii) $\mathbb{E}[B_t - B_s] = 0$.

Le point (ii) précédent caractérise des processus dits à incréments stationnaires. Si de plus on fixe que la loi de $B_t - B_s$ est une loi normale centrée et de variance $t - s$, il n'existe alors qu'un seul processus continu vérifiant les propriétés demandées, et c'est le mouvement brownien.

Toutefois le processus W n'est pas continu, car il est la "dérivée" d'un mouvement brownien dont les trajectoires ne sont pas \mathcal{C}^1 . On note parfois $W = \dot{B}$, et l'Équation (1) devient

$$\frac{dN(t, \omega)}{dt} = (\bar{r}(t) + \dot{B}(t, \omega))N(t, \omega), \quad N(0, \omega) = N_0(\omega).$$

Si on intègre en temps cette équation entre deux instants t_k et t_{k+1} , on obtient une formule de récurrence certainement utile pour comprendre la dynamique recherchée

$$N(t_{k+1}, \omega) - N(t_k, \omega) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \bar{r}(s)N(s, \omega)ds + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \dot{B}(s, \omega)N(s, \omega)ds.$$

Effectivement, si les trajectoires de \dot{B} étaient suffisamment régulières, on pourrait donner un sens à une solution de cette équation intégrale par un argument de type point fixe ou par compacité. Si on pousse encore le raisonnement, on peut demander à ce que les intégrales soient approchées par des sommes de Riemann, et on obtient un schéma d'Euler explicite de la forme

$$N(t_{k+1}, \omega) - N(t_k, \omega) = \bar{r}(t_k)N(t_k, \omega)(t_{k+1} - t_k) + \dot{B}(t_k, \omega)N(t_k, \omega)(t_{k+1} - t_k).$$

Puisque $\dot{B}(t_k) = W_{t_k} \simeq \frac{B_{t_{k+1}} - B_{t_k}}{t_{k+1} - t_k}$, on obtient une version discrète de la dynamique sous la forme

$$N(t_{k+1}, \omega) - N(t_k, \omega) = \bar{r}(t_k)N(t_k, \omega)(t_{k+1} - t_k) + N(t_k, \omega)(B_{t_{k+1}} - B_{t_k}).$$

En outre, la forme de cette équation discrète semble pouvoir s'étendre à des équations différentielles plus générales, par exemple non-autonomes et non-linéaires, ou alors en dimension $d \in \mathbb{N}^*$.

Le taux de croissance linéaire $(t, n) \mapsto \bar{r}(t)n$ est alors remplacé par une fonction temps-espace appelée "coefficient de dérive" et notée $(t, x) \mapsto b(t, x)$ pour $t \in \mathbb{R}_+, x \in \mathbb{R}^d$, et la perturbation aléatoire est remplacée par une fonction temps-espace appelée "coefficient de diffusion" et notée $(t, x) \mapsto \sigma(t, x)$ pour $t \in \mathbb{R}_+, x \in \mathbb{R}^d$. On se pose alors la question de l'existence d'un processus stochastique X tel que

$$\frac{dX_t}{dt} = b(t, X_t) + \sigma(t, X_t) \cdot \dot{B}_t \tag{2}$$

avec b et σ des fonctions régulières. On peut écrire l'Équation (2) en temps discret sur les incréments de X sous la forme

$$X_{t_{k+1}} - X_{t_k} = b(t_k, X_{t_k})(t_{k+1} - t_k) + \sigma(t_k, X_{t_k})(B_{t_{k+1}} - B_{t_k}),$$

et c'est ce genre de quantités qu'on va faire converger quand les instants t_k et t_{k+1} sont de plus en plus rapprochés. On remarque que le premier terme est similaire à une intégrale de Riemann, alors que le deuxième terme s'approche davantage d'une intégrale de Stieljes, mais, comme on le disait précédemment, les trajectoires de B ne sont pas assez régulières pour appliquer cette théorie. C'est l'intégrale d'Itô, impliquant les incréments de B , qui va être obtenue comme l'objet limite d'une telle somme. On la notera

$$\int_0^t \sigma(s, X_s) dB_s$$

et on utilise la notation dB pour insister sur la nécessité de contrôler les incréments de B , à ne pas confondre avec une notation formelle $\dot{B}_s ds$ sujette à de nombreuses erreurs.

On n'entrera pas dans les détails de la construction de cette intégrale dans ces notes, mais on renvoie le lecteur à [KS91] ou [RY99].

Si on utilise la notation d'Itô, on peut écrire l'Équation (2) en version intégrale

$$X_t - X_0 = \int_0^t b(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dB_s,$$

ou en version différentielle

$$dX_t = b(t, X_t) dt + \sigma(t, X_t) dB_t.$$

La version différentielle est une notation simplifiée de la version intégrale, mais on ne doit pas y lire des différentielles, car B n'est pas dérivable et X non plus. Cette écriture est utile car elle s'adapte très bien à un formalisme de calcul différentiel stochastique, abordé dans la sous-section suivante.

2.2. Formule d'Itô

La formule d'Itô est à la base du calcul stochastique car elle exprime la stabilité d'une certaine classe de processus à travers des transformations régulières. Elle fournit d'ailleurs des règles de calculs permettant de représenter le nouveau processus obtenu après transformation. C'est pour cette raison qu'on parle de "Formule d'Itô".

Définition 2.1. Soit $T > 0$. On note \mathcal{V}_T l'ensemble des processus stochastiques f définis sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ muni de la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ associée à B , à valeurs dans \mathbb{R} , indexés par $[0, T]$, satisfaisant les propriétés suivantes:

- $(t, \omega) \rightarrow f(t, \omega)$ est $\mathcal{B}([0, T]) \otimes \mathcal{F}$ mesurable,
- $f(t, \cdot)$ est \mathcal{F}_t -mesurable pour tout $t \in [0, T]$,
- $\mathbb{E} \left[\int_0^T f(t, \cdot)^2 dt \right] < +\infty$.

On notera $\mathcal{V} = \bigcap_{T>0} \mathcal{V}_T$.

On est parfois amené à considérer des filtrations différentes de la filtration naturelle du mouvement Brownien B , ainsi que des conditions d'intégrabilité plus faibles. Cela conduit à une définition légèrement différente de la classe de processus considérés.

Définition 2.2. On note $\mathcal{W}_T^{\mathcal{H}}$ l'ensemble des processus stochastiques f définis sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ muni d'une filtration $\{\mathcal{H}_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$, à valeurs dans \mathbb{R} , indexés par $[0, T]$, satisfaisant les propriétés suivantes:

- $(t, \omega) \rightarrow f(t, \omega)$ est $\mathcal{B}([0, T]) \otimes \mathcal{F}$ mesurable,
- B est une martingale pour $\{\mathcal{H}_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ et $f(t, \cdot)$ est \mathcal{H}_t -mesurable pour tout $t \in [0, T]$,

$$\bullet \mathbb{P} \left[\int_0^T f(t, \cdot)^2 dt < +\infty \right] = 1.$$

On notera $\mathcal{W}^{\mathcal{H}} = \bigcap_{T>0} \mathcal{W}_T^{\mathcal{H}}$.

La classe de processus stochastiques précédente permet de définir la classe de processus qui sera invariante par composition avec des fonction régulières : les “processus d’Itô”.

Définition 2.3. *Un processus d’Itô est un processus stochastique $\{X_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ muni d’une filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$, à valeurs dans \mathbb{R} , indexés par \mathbb{R}_+ , pouvant s’écrire de la manière suivante pour tout $t \geq 0$ presque sûrement*

$$X_t = X_0 + \int_0^t \psi(s, \cdot) ds + \int_0^t \phi(s, \cdot) dB_s,$$

avec $\phi \in \mathcal{W}^{\mathcal{H}}$ et $\mathbb{P} \left[\int_0^t |\psi(s, \cdot)| ds < +\infty, \forall t \geq 0 \right] = 1$. On le notera synthétiquement $dX_t = \psi dt + \phi dB_t$ avec pour donnée initiale X_0 .

L’invariance de la classe précédente est exprimée par la formule d’Itô suivante (voir Théorème 4.1.2 dans [Eva98]).

Théorème 2.4 (Formule d’Itô 1-dimensionnelle). *Soit $\{X_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ un processus d’Itô donné par :*

$$dX_t = \psi dt + \phi dB_t. \quad (3)$$

Soit $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$. Alors le processus stochastique $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ défini pour tout $t \geq 0$ par $Y_t = g(t, X_t)$ est encore un processus d’Itô et l’on a pour tout $t \geq 0$ presque sûrement :

$$dY_t = \frac{\partial g}{\partial t}(t, X_t) dt + \frac{\partial g}{\partial x}(t, X_t) dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, X_t) \phi^2 dt,$$

ce qui s’écrit également en utilisant l’Équation (3)

$$dY_t = \left(\frac{\partial g}{\partial t}(t, X_t) + \frac{\partial g}{\partial x}(t, X_t) \psi + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, X_t) \phi^2 \right) dt + \frac{\partial g}{\partial x}(t, X_t) \phi dB_t.$$

Cette formule se généralise au cas multidimensionnel où B est un mouvement Brownien de dimension $m \in \mathbb{N}$ (possédant possiblement des composantes corrélées). Un processus d’Itô de dimension d s’écrit alors :

$$dX_t = \psi dt + \phi dB_t \quad (4)$$

où $\psi = (\psi_i)_{1 \leq i \leq d}$ est un vecteur dont les coordonnées vérifient les conditions de la Définition 2.1, et il en va de même pour les coordonnées de la matrice $\phi = (\phi_{i,j})_{1 \leq i \leq d, 1 \leq j \leq m}$ qui s’applique sur un mouvement Brownien de dimension m (voir Théorème 4.2.1 dans [Eva98]).

Théorème 2.5 (Formule d’Itô multidimensionnelle). *Soient $\{X_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ un processus multidimensionnel défini en Équation (4), et $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d; \mathbb{R}^p)$, c’est-à-dire une fonction $g(t, x) = (g_1(t, x), \dots, g_p(t, x))$. Alors le processus $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ défini pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ par $Y(t, \omega) = g(t, X(t, \omega))$ est encore un processus d’Itô dont la k -ième composante ($1 \leq k \leq p$) est donnée par :*

$$dY_t^k = \frac{\partial g_k}{\partial t}(t, X_t) dt + \sum_{i=1}^d \frac{\partial g_k}{\partial x_i}(t, X_t) dX_t^i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \frac{\partial^2 g_k}{\partial x_i \partial x_j}(t, X_t) (\phi \phi^T)_{i,j} d\langle B^i, B^j \rangle_t,$$

où la notation $d\langle B^i, B^j \rangle_t = \rho_{ij} dt$ désigne la covariance entre les composantes du mouvement Brownien. Dans le cas de composantes indépendantes $\rho_{ij} = \mathbf{1}_{i=j}$.

2.3. Équations différentielles stochastiques

On note $E(b, \sigma, x)$ l'équation différentielle stochastique définie par

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t$$

sous la condition initiale $X_0 = x$. Elle doit être interprétée sous sa forme intégrale, c'est-à-dire vérifier que pour tout $t \geq 0$ presque sûrement

$$X_t = x + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s.$$

On appelle solution la donnée d'un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{R}_+})$ sur lequel est défini un mouvement Brownien B et d'un processus stochastique X sur cet espace de probabilité filtré vérifiant l'équation précédente.

Définition 2.6. *Il existe plusieurs notions d'existence de solution aux équations différentielles stochastiques.*

- On dit qu'il y a existence faible si pour toute donnée initiale x , il existe une solution de $E(b, \sigma, x)$.
- On dit qu'il y a existence et unicité faibles si pour tout x , les solutions de $E(b, \sigma, x)$ ont toutes la même loi.
- On dit qu'il y a unicité trajectorielle si pour tout x , deux solutions X et \tilde{X} de $E(b, \sigma, x)$, définies sur le même espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{R}_+})$ et pour le même mouvement Brownien B , sont indistingables l'une de l'autre, c'est-à-dire $\mathbb{P}(X_t = \tilde{X}_t, \forall t \in \mathbb{R}_+) = 1$.
- On dit qu'une solution faible X est solution forte si X est adapté à la filtration engendrée par B .

On fait très souvent appel au théorème suivant qui permet de récupérer une existence forte sous des conditions d'existence faible et d'unicité.

Théorème 2.7 (Yamada-Watanabe). *S'il y a existence faible et unicité trajectorielle, alors il y a existence et unicité faibles. De plus, pour tout choix de l'espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{R}_+})$ et d'un $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ mouvement Brownien B , pour toute donnée initiale x , il existe une solution forte de $E(b, \sigma, x)$.*

Enfin on cite un théorème classique d'existence faible et d'unicité trajectorielle qui est un équivalent du théorème de Cauchy-Lipschitz pour les équations différentielles ordinaires (voir Théorème 5.2.1 dans [Eva98]).

Théorème 2.8. *Supposons que*

H1: *Les fonctions b et σ sont continues.*

H2: *Les fonctions b et σ sont lipschitziennes par rapport à leur seconde variable uniformément en la variable t , c'est-à-dire qu'il existe une constante $L \geq 0$, tel que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, pour tout $x, y \in \mathbb{R}^d$, on ait*

$$|b(t, x) - b(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq L|x - y|,$$

alors il y a existence faible et unicité trajectorielle de l'équation $E(b, \sigma, x)$ (donc existence forte par le Théorème 2.7 de Yamada-Watanabe).

Exemple 2.9. *Dans le cas où $b : x \mapsto -\lambda x$ avec $\lambda > 0$ et $\sigma : x \mapsto 1$, la solution de l'équation différentielle stochastique est appelée processus d'Ornstein-Uhlenbeck*

$$dX_t = -\lambda X_t dt + dB_t.$$

La solution explicite est donnée par la formule

$$X_t = X_0 \exp(-\lambda t) + \int_0^t \exp(-\lambda(t-s))dB_s.$$

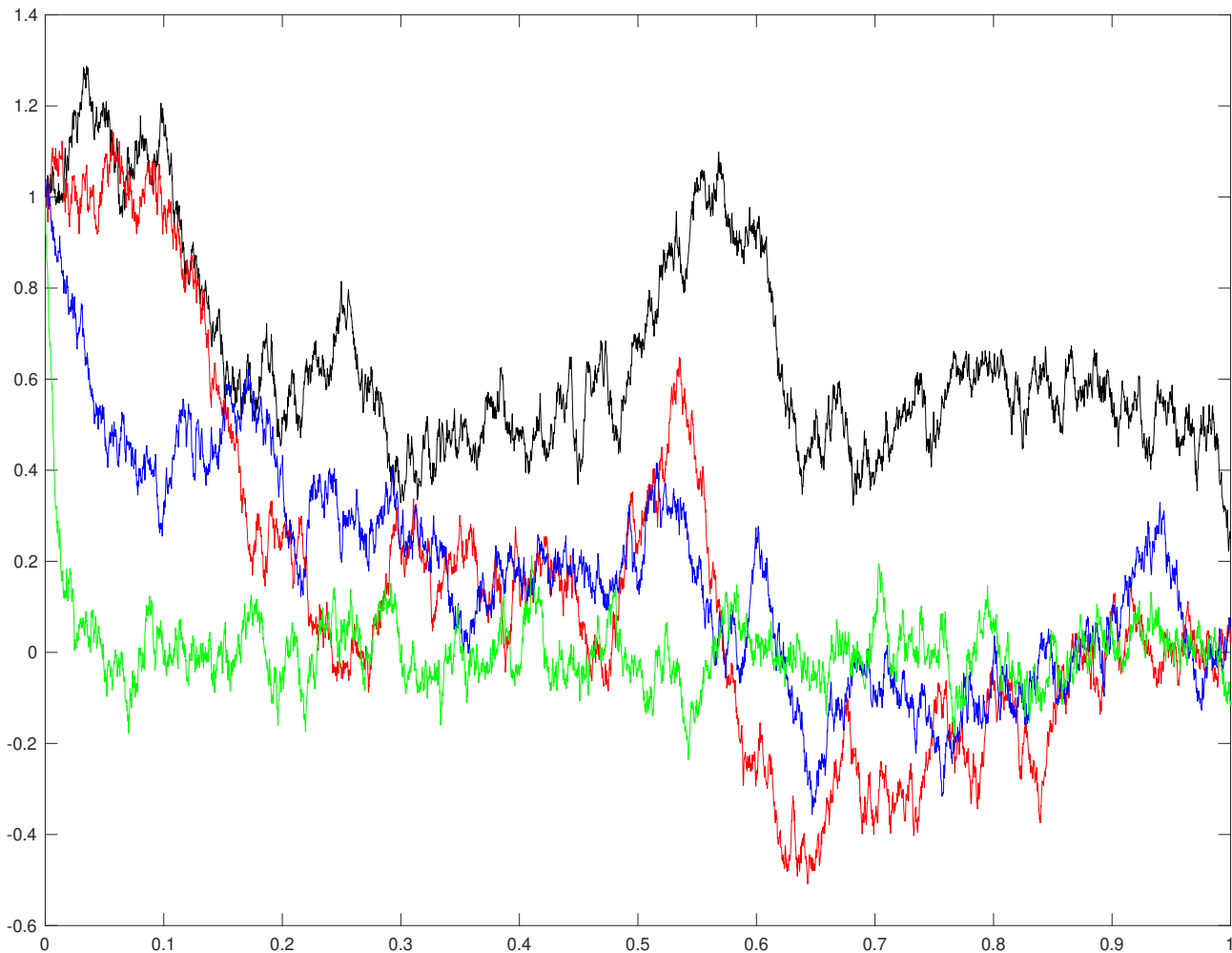


FIGURE 3. Des trajectoires continues de processus d’Ornstein-Uhlenbeck avec $X_0 = 1$ et pour $\lambda = 1$ (noir), $\lambda = 5$ (rouge), $\lambda = 10$ (bleu) ou $\lambda = 100$ (vert).

Exemple 2.10. Dans le cas où $b : x \mapsto \mu x$ avec $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma : x \mapsto \sigma x$ avec $\sigma > 0$, la solution de l’équation différentielle stochastique est appelée processus de Black-Scholes

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dB_t.$$

Ce processus modélise des marchés financiers. Le paramètre μ est un taux de rendement (typiquement 2%) et le paramètre σ est la volatilité du marché (typiquement 20%). La solution explicite est donnée par la formule

$$X_t = X_0 \exp \left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma B_t \right).$$

On remarque que cette formule défie l’intuition à cause du terme correctif $-\frac{\sigma^2}{2}t$. On peut montrer cette formule explicite en utilisant le Théorème 2.4 avec la fonction $g : (t, x) \mapsto \exp \left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma x \right)$ et calculer l’équation différentielle stochastique vérifiée par le processus $X_t := X_0 g(t, B_t)$.

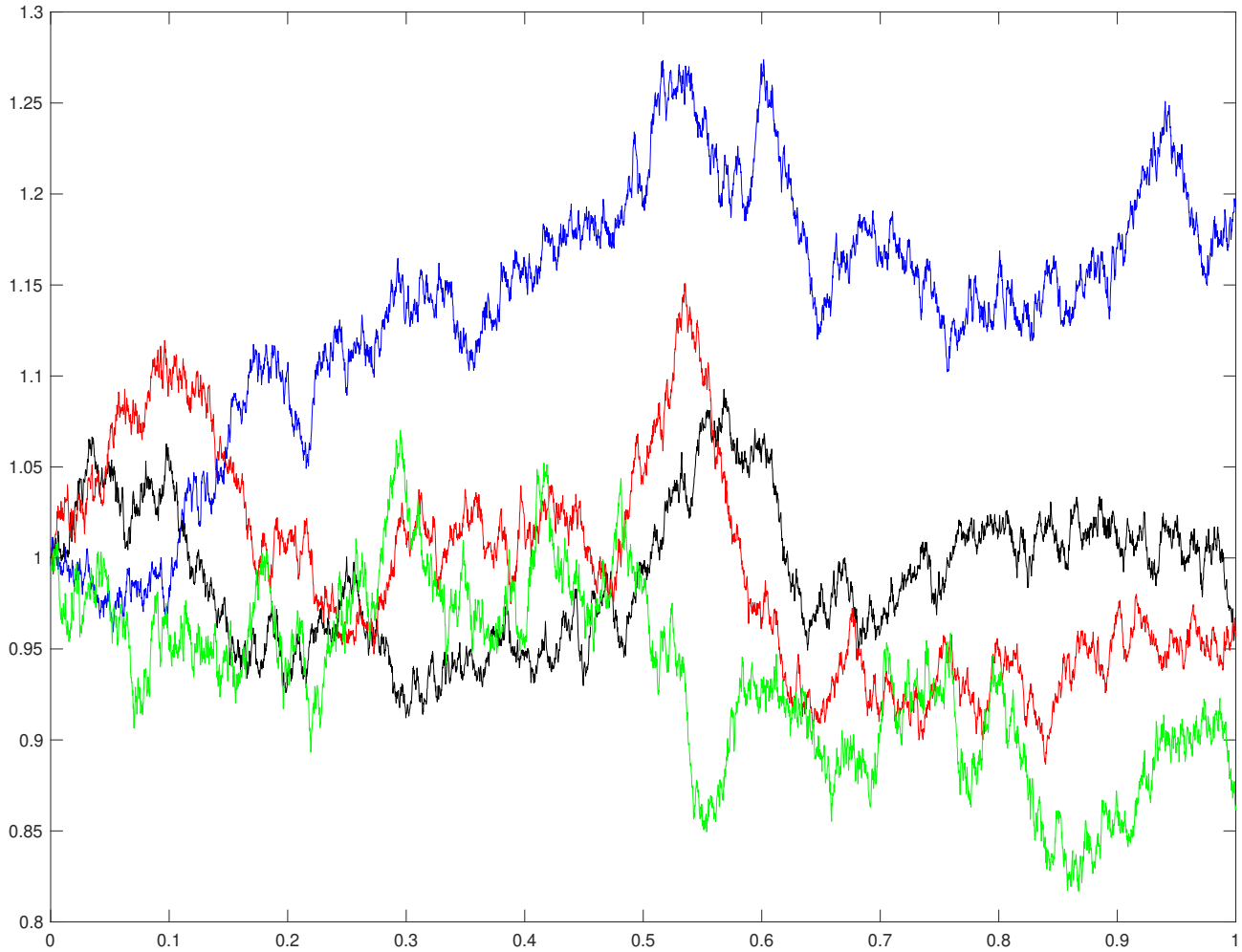


FIGURE 4. Des trajectoires continues du processus de Black-Scholes avec $(\mu, \sigma) = (0, 0.2)$ (noir), $(\mu, \sigma) = (0.02, 0.2)$ (rouge), $(\mu, \sigma) = (0.04, 0.2)$ (bleu) ou $(\mu, \sigma) = (0.04, 0.3)$ (vert).

2.4. Exercices sur le chapitre 2

Exercice 2.1. Vérifier si les processus $\{X_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ suivants sont des $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ martingales.

- $X_t = B_t + 4t$,
- $X_t = B_t^2$,
- $X_t = t^2 B_t - 2 \int_0^t s B_s ds$.

Exercice 2.2. Montrer que les processus $\{X_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ suivants sont bien définis dans l'espace considéré en tant que processus d'Itô, c'est-à-dire montrer qu'il existe deux processus ψ et ϕ vérifiant les conditions habituelles tels que $X_t = X_0 + \int_0^t \psi(s, \cdot) ds + \int_0^t \phi(s, \cdot) dB_s$, où B est un mouvement Brownien possiblement multi-dimensionnel à préciser.

- Dans \mathbb{R} , $X_t = B_t^4 - B_t^2 - \int_0^t \sqrt{|B_s|} dB_s$, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.
- Dans \mathbb{R} , $X_t = tB_t - \int_0^t s dB_s$, pour tout $t \in \mathbb{R}$.
- Dans \mathbb{R} , $X_t = \cos(B_t)$, pour tout $t \in \mathbb{R}$.
- Dans \mathbb{R}^d , $X_t = \sum_{k=1}^d \int_0^t B_s^{k+1} dB_s^k u_k$, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.

e) Dans \mathbb{R}^d , $X_t = \sum_{k=1}^d \left(\int_0^t B_s^k dB_s^k - (B_t^k)^2 \right) u_k$, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.

Exercice 2.3 (Théorème de représentation d'Itô). Soit V un processus de $L^2(\Omega)$ sur $[0, T]$ qui soit une martingale par rapport à $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]}$. On veut montrer qu'il existe un processus $\phi \in \mathcal{V}$ tel que

$$V_T(\omega) = \mathbb{E}[V_0] + \int_0^T \phi(t, \omega) dB_t \text{ pour presque tout } \omega \in \Omega. \quad (\star)$$

a) Supposons que $V_T = \exp \left(\int_0^T f(t) dB_t - \frac{1}{2} \int_0^T f^2(t) dt \right)$ pour une fonction f dans $L^2(0, T)$. Montrer que (\star) est vérifiée.

On peut montrer que la limite simple d'une suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions de \mathcal{V} qui soit de Cauchy dans $L^2(\Omega \times [0, T])$ admet une sous-suite qui soit convergente dans \mathcal{V} .

b) Supposons qu'il existe une séquence de processus $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de la forme décrite en question a) telle que $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers V dans $L^2(\Omega)$. Montrer que

$$V_T = \mathbb{E}[V] + \int_0^T \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) dB_t$$

où $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $L^2(\Omega \times [0, T])$.

c) En déduire le théorème de représentation (i.e. la décomposition (\star)) pour un tel processus V .
 d) Montrer l'unicité du processus ϕ représentant V dans (\star) .

Exercice 2.4 (Intégrale de Stratonovich). Soit $f \in \mathcal{V}$. Supposons que $t \mapsto f(t, \omega)$ soit continue pour presque tout $\omega \in \Omega$. On sait que l'intégrale d'Itô vérifie

$$\int_0^T f(t, \omega) dB_t(\omega) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{j \in \mathbb{N}} f(t_j, \omega) (B_{t_{j+1}} - B_{t_j}) \quad \text{dans } L^2(\mathbb{P}).$$

De manière similaire, on peut définir l'intégrale de Stratonovich avec $t_j^* = \frac{1}{2}(t_j + t_{j+1})$ par

$$\int_0^T f(t, \omega) \circ dB_t(\omega) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{j \in \mathbb{N}} f(t_j^*, \omega) (B_{t_{j+1}} - B_{t_j}) \quad \text{dans } L^2(\mathbb{P}),$$

a) Comparer

$$\int_0^T B_t \circ dB_t \text{ et } \int_0^T B_t dB_t.$$

b) Soient b et σ deux fonctions régulières telles que toutes les intégrales suivantes existent. Par définition, le processus $\{X_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ est une solution d'une équation différentielle stochastique au sens de Stratonovich telle que pour tout $t \geq 0$ presque sûrement

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) \circ dB_s,$$

si et seulement si le processus d'Itô $\{X_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ est une solution de l'équation différentielle stochastique au sens d'Itô telle que pour tout $t \geq 0$ presque sûrement

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s) ds + \frac{1}{2} \int_0^t \partial_x \sigma(s, X_s) \sigma(x, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dB_s.$$

Transformer les équations différentielles stochastiques au sens de Stratonovich en équations différentielles stochastiques au sens d'Itô et inversement.

- a) $dX_t = \gamma X_t dt + \alpha X_t \circ dB_t$
 - b) $dX_t = \sin(X_t) \cos(X_t) dt + (t^2 + \cos(X_t)) \circ dB_t$
 - c) $dX_t = \delta X_t dt + \beta X_t dB_t$
 - d) $dX_t = 2 \exp(-X_t) dt + X_t^2 dB_t$
- où α, β, γ et δ sont des constantes.

Exercice 2.5. Calculer les solutions des équations différentielles suivantes où α, β et γ sont des constantes.

- a) $dX_t = \alpha X_t dt + \beta dB_t$ et $X_0 = 1$,
- b) $dX_t = \frac{1}{2} \gamma^2 X_t dt + \gamma X_t dB_t$ et $X_0 = 1$,
- c) $dX_t = -\frac{X_t}{1+t} dt + \frac{1}{1+t} dB_t$ et $X_0 = 0$.

Exercice 2.6. Que dire de l'existence de solutions aux équations différentielles stochastiques suivantes ?

- a) $dX_t = (\sin(B_t)^2 - X_t) dt - 2 \sin(B_t) \cos(B_t) dB_t$ et $X_0 = 1$,
- b) $dX_t = \frac{1}{3} X_t^{1/3} dt + X_t^{2/3} dB_t$ et $X_0 = 1$,
- c) $dX_t = 3 \frac{X_t}{B_t} dB_t + 3 \frac{X_t}{B_t^2} dt$ et $X_0 = 0$.

Exhiber une solution. Discuter de l'unicité des solutions.

Exercice 2.7. Soit $f \in \mathcal{V}$. On définit un processus $\{X_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ tel que pour tout $t \geq 0$ presque sûrement

$$X_t = \exp \left(\int_0^t f(s, \omega) dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t f(s, \omega)^2 ds \right).$$

et on suppose que $t \mapsto X_t f(t, \cdot) \in \mathcal{V}$.

- a) Montrer que le processus $\{X_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ vérifie l'équation différentielle stochastique

$$dX_t = X_t f(t, \cdot) dB_t.$$

- b) En déduire que X est une martingale par rapport à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$.

Exercice 2.8. On se place sur l'espace des fonctions $\mathcal{C}^2([0, 1]; \mathbb{R})$ avec les conditions aux bords de Dirichlet homogènes. On pose Δ le Laplacien défini par la réalisation de l'opérateur de dérivée seconde sur cet espace. Cet opérateur possède alors une famille dénombrable de valeurs propres données par $(-k^2 \pi^2)_{k \geq 1}$ de vecteurs propres associés $(\theta \mapsto \sin(k\pi\theta))_{k \geq 1}$. On se place sur l'espace de dimension d engendré par la famille $(\theta \mapsto \sin(k\pi\theta))_{k=1 \dots d}$.

- a) Sur cet espace de dimension finie, on peut représenter le Laplacien par une matrice A diagonale. On cherche alors à résoudre l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dX_t = AX_t dt + I dB_t,$$

où B est un mouvement Brownien en dimension d et I est la matrice identité en dimension d . Montrer que la solution de l'équation différentielle stochastique $E(A, I, x)$ est donnée pour tout $t \geq 0$ presque sûrement par

$$X_t = \exp(tA)x + \int_0^t \exp((t-s)A) dB_s.$$

- b) On utilisera plus tard cette expression exacte en dimension finie pour définir des solutions en dimension infinie par passage à la limite $d \rightarrow +\infty$. Montrer que la formule précédente reste valable pour toute matrice A , et pas seulement celle représentant le Laplacien.

3. INTÉGRATION CONTRE UN PROCESSUS DE WIENER CYLINDRIQUE

3.1. Processus de Wiener cylindrique

Le formalisme obtenu en dimension finie semble naturellement s'adapter à la dimension infinie en passant à la limite sur la dimension d de l'espace \mathbb{R}^d engendré par la base canonique $(e_k)_{k=1\dots d}$. De fait l'extension semble simple sur un espace possédant une "base" dénombrable. Les espaces de Hilbert séparables semblent alors être le cadre idéal. Surtout lorsqu'on pense aux espaces de Sobolev $H^n := W^{n,2}$ qui étaient déjà le cadre adapté aux approches variationnelles des équations aux dérivées partielles. On a donc une table d'extension:

$$(e_k)_{k=1\dots d} \rightarrow (e_k)_{k \geq 1} \quad (5)$$

$$X_t = \sum_{k=1}^d X_t^k e_k \rightarrow X_t = \lim_{d \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^d X_t^k e_k \quad (6)$$

$$X_t = (X_t^1, X_t^2, \dots, X_t^d) \rightarrow X_t \in \mathbb{H} := \overline{\text{Vect}((e_k)_{k \geq 1})} \quad (7)$$

$$AX_t = \sum_{k=1}^d X_t^k A e_k = - \sum_{k=1}^d X_t^k (k\pi)^2 e_k \rightarrow AX_t = - \lim_{d \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^d X_t^k (k\pi)^2 e_k \quad (8)$$

$$e^{tA} X_t = \sum_{k=1}^d X_t^k e^{-t(k\pi)^2} e_k \rightarrow e^{tA} X_t = \lim_{d \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^d X_t^k e^{-t(k\pi)^2} e_k \quad (9)$$

$$B_t = (B_t^1, B_t^2, \dots, B_t^d) \rightarrow \lim_{d \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^d B_t^k e_k \quad (10)$$

De cette table, on remarque premièrement que si la série (6) converge dans \mathbb{H} , il n'est rien de sûr vis-à-vis de la série (8), mais ce n'est pas le problème fondamental car la série (9) semble converger et c'est cette série qui apparaît dans la solution. Par contre, la série (10) semble problématique. En effet, si on se fixe $\omega \in \Omega$, alors la série converge dans \mathbb{H} (l'espace de Hilbert engendré par la base hilbertienne orthonormée) si et seulement si

$$\lim_{d \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^d (B_t^k(\omega))^2 < +\infty$$

pour un instant $t \in [0, T]$. Mais cette série est une somme de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées, et la loi forte des grands nombres suggère que la série diverge presque sûrement dans \mathbb{H} , car $\frac{1}{d} \sum_{k=1}^d (B_t^k(\cdot))^2$ converge presque sûrement vers l'espérance $\mathbb{E}[(B_t^1(\cdot))^2] = t$. On a également un calcul explicite de l'espérance d'une telle série (à termes positifs), et on obtient $\mathbb{E} \left[\sum_{k=1}^d (B_t^k(\cdot))^2 \right] = \mathbb{V} \left[\sum_{k=1}^d B_t^k(\cdot) \right] = \sum_{k=1}^d \mathbb{E} [(B_t^k(\cdot))^2] = \sum_{k=1}^d t = d \times t$. La variable aléatoire limite décrite par (10) quand $d \rightarrow +\infty$ n'a donc pas de sens dans \mathbb{H} car la série ne converge pas (ni presque sûrement, ni en probabilité, ni dans $L^2(\Omega; \mathbb{H})$).

On va contourner cette limitation en interprétant la série dans un espace de Hilbert plus grand dans lequel la convergence de la série serait vérifiée, et on va introduire une manière de se représenter cette série qui porte le nom de processus de Wiener cylindrique dans \mathbb{H} . On devra pour cela introduire la notion d'opérateur Hilbert-Schmidt.

Définition 3.1 (Opérateurs Hilbert-Schmidt). *Soient \mathbb{H} et $\tilde{\mathbb{H}}$ deux espaces de Hilbert séparables dont on note respectivement $\|\cdot\|_{\mathbb{H}}$ et $\|\cdot\|_{\tilde{\mathbb{H}}}$ les normes associées. Soit $L \in \mathcal{L}(\mathbb{H}, \tilde{\mathbb{H}})$ un opérateur linéaire borné. On dit que L est Hilbert-Schmidt s'il existe une base hilbertienne orthonormée $(e_k)_{k \in I}$ de \mathbb{H} , avec $I \subset \mathbb{N}$, telle que*

$$\sum_{k \in I} \|L e_k\|_{\tilde{\mathbb{H}}}^2 < +\infty.$$

Dans ce cas, la valeur précédente est finie pour n'importe quelle autre base hilbertienne orthonormée, et elle ne dépend pas du choix de cette base. On la note alors

$$\|L\|_{\mathcal{L}_2(\mathbf{H}, \tilde{\mathbf{H}})}^2 = \sum_{k \in I} |Le_k|_{\tilde{\mathbf{H}}}^2.$$

Cela définit une norme sur le sous espace vectoriel des opérateurs Hilbert-Schmidt noté $\mathcal{L}_2(\mathbf{H}, \tilde{\mathbf{H}})$ qui est en fait un espace de Hilbert.

Les opérateurs de Hilbert-Schmidt sont fortement reliés aux opérateurs de trace finie qui jouent un rôle central dans la théorie. En effet L est Hilbert-Schmidt si et seulement si LL^* ou L^*L sont des opérateurs de trace finie.

Définition 3.2 (Opérateurs de trace finie). Soit $T \in \mathcal{L}(\mathbf{H}, \mathbf{H})$ un opérateur linéaire. On dit qu'il est à trace finie si la quantité

$$\text{Tr}(T) = \sum_{k \in I} \langle Te_k, e_k \rangle_{\mathbf{H}}$$

est absolument convergente, avec $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{H}}$ le produit scalaire sur \mathbf{H} . Dans ce cas, la valeur précédente est finie pour n'importe quelle autre base hilbertienne orthonormée, et elle ne dépend pas du choix de cette base.

Le lien entre les opérateurs de trace finie, et les opérateurs de Hilbert-Schmidt est fait à travers la formule

$$\|L\|_{\mathcal{L}_2(\mathbf{H}, \tilde{\mathbf{H}})}^2 = \sum_{k \in I} \|Le_k\|_{\tilde{\mathbf{H}}}^2 = \sum_{k \in I} \langle Le_k, Le_k \rangle_{\tilde{\mathbf{H}}} = \sum_{k \in I} \langle L^*Le_k, e_k \rangle_{\mathbf{H}} = \text{Tr}(L^*L).$$

En fait la trace définit un produit scalaire sur les opérateurs de trace finie, et le complété pour la norme associée est l'espace des opérateurs de Hilbert-Schmidt.

Définition 3.3 (Processus de Wiener cylindrique). Pour tout $t \geq 0$, on note

$$W_t := \sum_{k \in I} B_t^k e_k$$

la série formelle définissant un processus de Wiener cylindrique $W := \{W_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$.

Cet objet n'est pas défini dans \mathbf{H} dès lors que la dimension de \mathbf{H} est infinie, mais il a en réalité un sens à travers l'action de tout opérateur Hilbert-Schmidt sur lui-même. Effectivement, on peut définir l'action de cet opérateur sur W de la manière suivante.

Proposition 3.4. Soit W un processus de Wiener cylindrique donné par la Définition 3.3. Soit $L \in \mathcal{L}_2(\mathbf{H}, \tilde{\mathbf{H}})$, alors, pour tout $t \geq 0$, la variable aléatoire

$$LW(t) := \sum_{k \in I} B_t^k Le_k$$

est bien définie dans $L^2(\Omega; \tilde{\mathbf{H}})$ l'ensemble des variables aléatoires de carré intégrable à valeur dans $\tilde{\mathbf{H}}$, c'est-à-dire les variables aléatoires Z telles que $\mathbb{E}[\|Z\|_{\tilde{\mathbf{H}}}^2] < +\infty$. De plus cette quantité ne dépend pas de la base hilbertienne orthonormée choisie pour construire le processus de Wiener cylindrique W .

Exemple 3.5. Soit $h \in \mathbf{H}$ définissant la forme linéaire

$$\langle h, \cdot \rangle : \mathbf{H} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Alors cette forme linéaire est Hilbert-Schmidt, et sa norme d'opérateur Hilbert-Schmidt est égale à $\|\langle h, \cdot \rangle\|_{\mathcal{L}_2(\mathbf{H}, \mathbb{R})} = \|h\|_{\mathbf{H}}$. Par suite l'objet $\langle h, W(t) \rangle$ défini dans la Proposition 3.4 est une variable aléatoire réelle centrée de carré

intégrable et sa variance est $\mathbb{E}[\langle h, W(t) \rangle^2] = t \|h\|_{\tilde{H}}^2$. On remarque une propriété d'isométrie entre l'espace des formes linéaires $\langle h, \cdot \rangle$ et les variables aléatoires $L^2(\Omega; \mathbb{R})$.

Exemple 3.6. Soit $H \subset \tilde{H}$ telle que l'injection $i : H \rightarrow \tilde{H}$ soit un opérateur linéaire Hilbert-Schmidt. Alors, à t fixé, l'objet $W(t)$ peut-être identifié avec $i(W(t)) \in \tilde{H}$, qui est bien défini par une série convergente dans \tilde{H} . De plus les propriétés de cet objet ne dépendent pas du choix de \tilde{H} et de l'injection i . Enfin, étant donné un espace de Hilbert séparable H de base hilbertienne orthonormée $(e_k)_{k \in I}$, il existe toujours un espace de Hilbert séparable \tilde{H} de base hilbertienne orthonormée $(\tilde{e}_k)_{k \in I}$ tel que l'injection $i : H \rightarrow \tilde{H}$ définie par linéarité avec $i(e_k) = \frac{1}{k} \tilde{e}_k$ est Hilbert-Schmidt.

3.2. Intégrale stochastique contre un processus de Wiener cylindrique

Comme on a pu le faire pour les intégrales classiques d'Itô, il suffit de définir une intégrale contre des processus élémentaires (i.e. constant par morceaux en temps sur la grille temporelle $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{N+1} = T$ avec $N \in \mathbb{N}$) en utilisant la Proposition 3.4 pour donner un sens à

$$\sum_{i=0}^N L(t_i)(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) = \sum_{i=0}^{N-1} (L(t_i) - L(t_{i+1}))W_{t_{i+1}} + L(t_N)W_T,$$

où chaque $\{L(t_i)\}_{i=0 \dots N}$ est un opérateur Hilbert-Schmidt.

On passe ensuite à la limite à l'aide d'une propriété d'isométrie. On ne détaille pas la construction, mais on précise une condition suffisante pour l'existence d'une intégrale stochastique d'opérateurs Hilbert-Schmidt contre un processus de Wiener cylindrique.

Proposition 3.7. Soit $L : t \in [0, T] \mapsto \mathcal{L}(H, \tilde{H})$ une fonction déterministe indexée par le temps à valeurs dans les opérateurs linéaires continus $\mathcal{L}(H, \tilde{H})$ de H dans \tilde{H} et W un processus de Wiener cylindrique sur H . Supposons que

$$\int_0^T \|L(t)\|_{\mathcal{L}_2(H, \tilde{H})}^2 dt < +\infty, \quad (11)$$

(qui est une intégrale classique au sens de Lebesgue sur $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$) alors on peut définir l'intégrale stochastique

$$\int_0^T L(t) dW_t := \sum_{m \in I_{\tilde{H}}} \left(\sum_{k \in I_H} \int_0^T \langle L(t)e_k, \tilde{e}_m \rangle_{\tilde{H}} dB_t^k \right) \tilde{e}_m, \quad (12)$$

où $(e_k)_{k \in I_H}$ et $(\tilde{e}_k)_{k \in I_{\tilde{H}}}$ sont respectivement des bases hilbertiennes orthonormées de H et \tilde{H} . Dans ce cas cette quantité ne dépend pas du choix des bases hilbertiennes orthonormées choisies. De plus on a l'isométrie d'Itô

$$\mathbb{E} \left[\left\| \int_0^T L(t) dW_t \right\|_{\tilde{H}}^2 \right] = \int_0^T \|L(t)\|_{\mathcal{L}_2(H, \tilde{H})}^2 dt,$$

ce qui prouve par l'hypothèse sur la finitude de cette quantité que l'intégrale est bien un objet à valeurs dans $L^2(\Omega; \tilde{H})$.

Proof. L'objet défini au membre de droite de l'Équation (12) est une série qui n'implique que des quantités classiques. On doit donc simplement vérifier que les séries sont bien définies. Remarquons que l'hypothèse décrite par l'Équation (11) implique par le théorème de Fubini que la série suivante

$$\sum_{m \in I_{\tilde{H}}} \left(\int_0^T \sum_{k \in I_H} \langle L(t)e_k, \tilde{e}_m \rangle^2 dt \right)$$

est de Cauchy dans \mathbb{R} , c'est-à-dire que si on remplace la famille d'indices $I_{\tilde{\mathbb{H}}}$ par les indices m tels que $p \leq m \leq q$ et l'espace $\tilde{\mathbb{H}}$ par $V_{p,q} = \text{Vect}(\tilde{e}_p, \dots, \tilde{e}_q) \subset \tilde{\mathbb{H}}$ alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang N tel que $q \geq p \geq N$ implique

$$\sum_{m=p}^q \int_0^T \sum_{k \in I_{\tilde{\mathbb{H}}}} \langle L(t)e_k, \tilde{e}_m \rangle^2 dt = \int_0^T \|L(t)\|_{\mathcal{L}_2(\mathbb{H}, V_{p,q})}^2 dt \leq \varepsilon.$$

On va montrer que la série de l'Équation (12) (tronquée en dimension finie dans $\tilde{\mathbb{H}}$, c'est-à-dire en projetant sur $V_{p,q}$) est de Cauchy dans $L^2(\Omega; \tilde{\mathbb{H}})$. Pour cela, il suffirait d'avoir l'isométrie d'Itô dans les sous-espaces $V_{p,q}$, car on aurait

$$\mathbb{E} \left[\left\| \sum_{m=p}^q \left(\sum_{k \in I_{\tilde{\mathbb{H}}}} \int_0^T \langle L(t)e_k, \tilde{e}_m \rangle_{\tilde{\mathbb{H}}} dB_t^k \right) \tilde{e}_m \right\|_{\tilde{\mathbb{H}}}^2 \right] = \int_0^T \|L(t)\|_{\mathcal{L}_2(\mathbb{H}, V_{p,q})}^2 dt \leq \varepsilon.$$

Il reste donc à vérifier l'isométrie d'Itô pour les sous-espaces $V_{p,q}$ pour donner un sens à l'intégrale stochastique, et on montrera ensuite l'isométrie d'Itô pour $\tilde{\mathbb{H}}$. Mais en réalité le calcul est le même en remplaçant la famille d'indices $I_{\tilde{\mathbb{H}}}$ par les indices m tels que $p \leq m \leq q$. On se contente donc de vérifier l'isométrie pour $\tilde{\mathbb{H}}$. En utilisant l'identité de Parseval, puis l'indépendance des mouvements Browniens $(B^k)_{k \in I_{\tilde{\mathbb{H}}}}$, puis l'isométrie d'Itô contre un mouvement Brownien en dimension 1, puis Fubini-Tonelli et l'identité de Parseval, on obtient la suite d'égalités suivante :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\left\| \int_0^T L(t) dW_t \right\|_{\tilde{\mathbb{H}}}^2 \right] &= \sum_{m \in I_{\tilde{\mathbb{H}}}} \mathbb{E} \left[\left\| \sum_{k \in I_{\tilde{\mathbb{H}}}} \int_0^T \langle L(t)e_k, \tilde{e}_m \rangle dB_t^k \right\|_{\tilde{\mathbb{H}}}^2 \right] \\ &= \sum_{m \in I_{\tilde{\mathbb{H}}}} \sum_{k \in I_{\tilde{\mathbb{H}}}} \mathbb{E} \left[\left\| \int_0^T \langle L(t)e_k, \tilde{e}_m \rangle dB_t^k \right\|_{\tilde{\mathbb{H}}}^2 \right] \\ &= \sum_{m \in I_{\tilde{\mathbb{H}}}} \sum_{k \in I_{\tilde{\mathbb{H}}}} \int_0^T |\langle L(t)e_k, \tilde{e}_m \rangle|^2 dt \\ &= \sum_{k \in I_{\tilde{\mathbb{H}}}} \int_0^T \|L(t)e_k\|_{\tilde{\mathbb{H}}}^2 dt = \int_0^T \|L(t)\|_{\mathcal{L}_2(\mathbb{H}, \tilde{\mathbb{H}})}^2 dt, \end{aligned}$$

ce qui conclut la démonstration de l'existence de l'intégrale stochastique d'opérateurs Hilbert-Schmidt contre un processus de Wiener cylindrique. \square

On sait maintenant donner un sens à l'objet donné par la série (10). Si on suppose que l'opérateur e^{tA} est Hilbert-Schmidt alors on pourrait donner un sens à la série (9). Et plus exactement avec la condition

$$\int_0^T \|e^{tA}\|_{\mathcal{L}_2(\mathbb{H}, \mathbb{H})}^2 dt < +\infty,$$

on pourrait définir l'objet

$$\int_0^t \exp((t-s)A) dW_s,$$

qui est le candidat idéal pour être solution d'une équation aux dérivées partielles stochastique linéaire. On pourra voir l'Exercice 2.8 pour le cas de la dimension finie, et la Figure 5 pour une illustration en dimension 5.

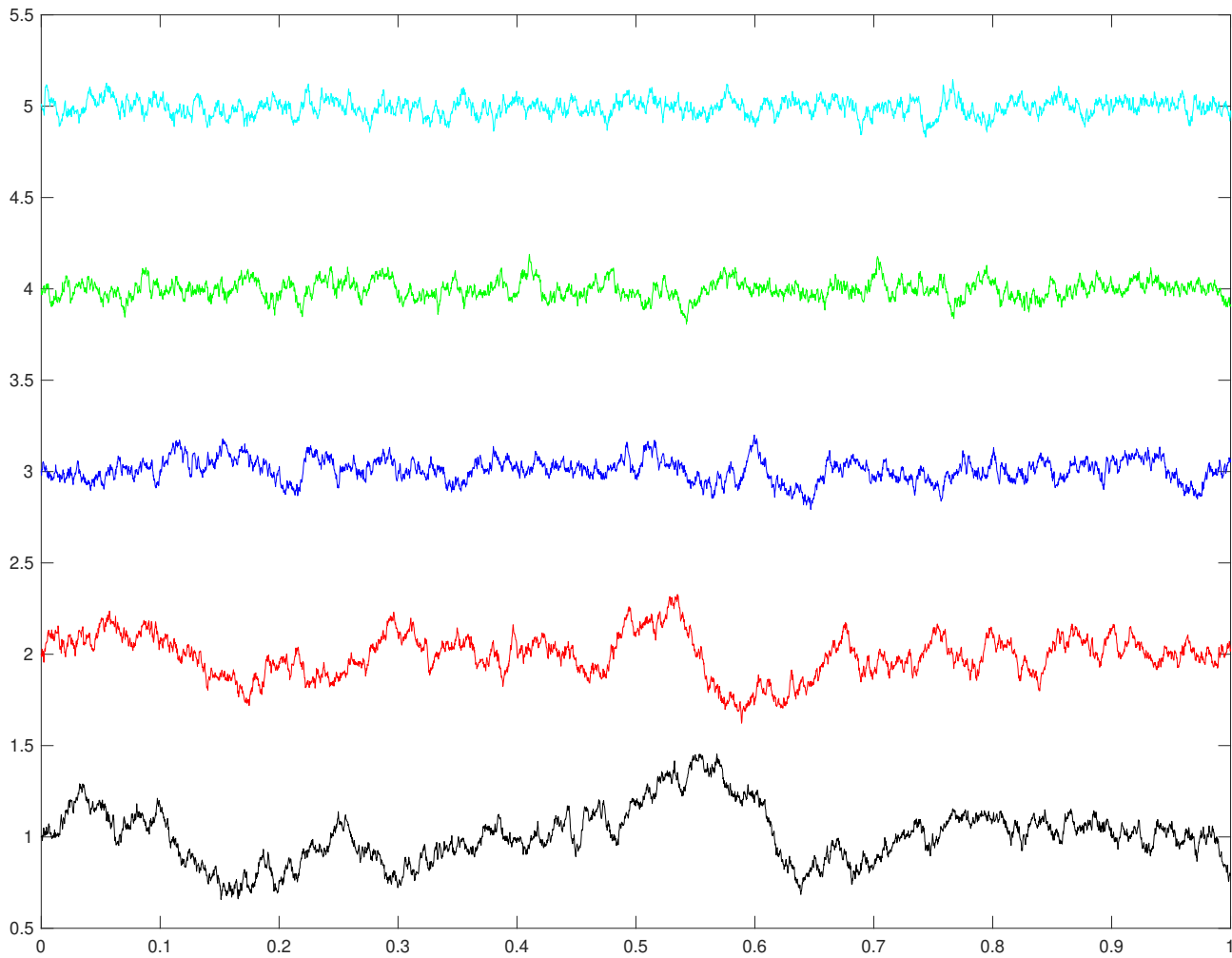


FIGURE 5. Des trajectoires des 5 premières “coordonnées” de l’intégrale stochastique $\int_0^t \exp((1-s)\Delta) dW_s$ de l’Exercice 2.8. La k -ième coordonnée a été translatée horizontalement de k pour une meilleur lisibilité.

3.3. Exercices sur le chapitre 3

Exercice 3.1. Soit $h \in H$ définissant la forme linéaire

$$\langle h, \cdot \rangle : H \rightarrow \mathbb{R}.$$

- a) Montrer que cette forme linéaire est un opérateur Hilbert-Schmidt de H dans \mathbb{R} .
- b) Montrer que sa norme d’opérateur Hilbert-Schmidt est égale à $\|\langle h, \cdot \rangle\|_{\mathcal{L}_2(H;\mathbb{R})} = \|h\|_H$.
- c) Calculer, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, la moyenne et la variance de la variable aléatoire réelle $\langle h, W(t) \rangle$ définie par la Proposition 3.4.

Exercice 3.2. On pose $W^d := \{W_t^d\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ le processus aléatoire

$$W_t^d = \sum_{k=1}^d B_t^k e_k,$$

où $(e_k)_{k \geq 1}$ est une base orthonormée de H . On se donne un opérateur $R \in \mathcal{L}(H; H)$ tel que $Re_k = r_k e_k$ pour tout $k \geq 1$ avec

$$\sum_{k \geq 1} r_k^2 < +\infty.$$

- Montrer que R^*R est un opérateur auto-adjoint, positif et de trace finie sur H .
- Calculer, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, la quantité $\mathbb{E}[\|RW_t^d\|_H^2]$.
- Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, la suite $(RW_t^d)_{d \geq 1}$ est de Cauchy dans $L^2(\Omega; H)$?

4. ÉDP STOCHASTIQUES LINÉAIRES AVEC BRUIT ADDITIF

Dans cette partie, on va décrire quelques éléments de la théorie des semi-groupes (voir [Eva98, Chap. 7.4]) pour les équations aux dérivées partielles déterministes, car cette théorie va nous permettre de définir très simplement des solutions d'équations aux dérivées partielles stochastiques linéaires dirigées par un processus de Wiener cylindrique. Plus exactement, on va traiter un bruit additif. Le cas du bruit multiplicatif sera traité en Section 5. Les résultats de cette partie sont détaillés dans le livre [DPZ14].

4.1. Semi-groupe pour les équations aux dérivées partielles linéaires

Dans un cadre purement déterministe, la théorie des opérateurs permet d'établir un résultat d'existence et d'unicité de solution d'équations aux dérivées partielles linéaires à travers des propriétés de dissipation d'énergie. Techniquement on souhaite relier la solution d'une équation aux dérivées partielles linéaire de la forme

$$\begin{cases} X'(t) &= AX(t), \\ X(0) &= X_0 \in K, \end{cases} \tag{13}$$

où A est un opérateur linéaire (non borné en général) d'un espace de Banach K , à l'existence d'un flot $\{S(t)\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ tel que $X(t) = S(t)X_0$.

Définition 4.1. Soit K un espace de Banach, on dit que la famille d'opérateurs $\{S(t)\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ forme un semi-groupe fortement continu si

- Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $S(t) \in \mathcal{L}(K, K)$,
- $S(0) = Id_{\mathcal{L}(K, K)}$,
- Pour tout s et $t \in \mathbb{R}_+$, $S(t + s) = S(t)S(s)$,
- Pour tout $x \in K$, $\lim_{t \rightarrow 0} S(t)x = x$.

On dit qu'il est "de contraction" lorsque $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(K, K)} \leq 1$.

D'un semi-groupe, on peut extraire un opérateur linéaire A défini sur un sous-ensemble $D(A)$ de K qu'on appelle le domaine de l'opérateur A . C'est ce qu'on appelle le générateur infinitésimal de $\{S(t)\}_{t \in \mathbb{R}_+}$.

Définition 4.2. Soient K un espace de Banach et $\{S(t)\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ un semi-groupe fortement continu. On appelle générateur infinitésimal du semi-groupe, la donnée du couple $(A, D(A))$ telle que

$$D(A) := \left\{ x \in K : \lim_{t \rightarrow 0} \frac{S(t)x - x}{t} \text{ existe} \right\},$$

et

$$A : \begin{array}{ll} D(A) & \rightarrow K \\ x & \mapsto \lim_{t \rightarrow 0} \frac{S(t)x - x}{t} \end{array} .$$

Remarque 4.3. Lorsque $A \in \mathcal{L}(K, K)$ est donné et est tel que la série $\exp(tA)$ existe et forme un semi-groupe fortement continu, tel que $D(A) = K$ alors le générateur infinitésimal du semi-groupe est donné par $(A, D(A))$. Pour cette raison, on note parfois abusivement $S(t) = \exp(tA)$.

Théorème 4.4 (Régularité du semi-groupe). Soient K un espace de Banach et $\{S(t)\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ un semi-groupe fortement continu de contraction avec $(A, D(A))$ son générateur infinitésimal, alors

- Pour tout $x \in K$, le flot $t \mapsto S(t)x$ appartient à $C^0(\mathbb{R}_+; K)$.
- Pour tout $x \in D(A)$, le flot $X : t \mapsto S(t)x$ appartient à $C^1(\mathbb{R}_+; D(A))$ et vérifie pour tout $t \geq 0$

$$X'(t) = (S(t)x)' = AX(t) = AS(t)x.$$

Théorème 4.5 (Existence et Unicité des solutions). Soit $A : D(A) \subset K \rightarrow K$ un opérateur linéaire, on a l'équivalence

- $(A, D(A))$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu, qui est de contraction.
- $D(A)$ est dense et pour toute condition initiale $X_0 \in D(A)$, il existe une unique solution $X : t \mapsto X(t) \in C^1(\mathbb{R}_+; K)$ de l'Équation (13).

De plus, dans ce cas, on a $X \in C^1(\mathbb{R}_+; D(A))$ et cette solution vérifie

$$\sup_{t \geq 0} \|X(t)\|_K \leq \|X_0\|_K \quad \text{et} \quad \sup_{t \geq 0} \|X'(t)\|_K \leq \sup_{t \geq 0} \|AX(t)\|_K \leq \|AX_0\|_K.$$

Définition 4.6 (Opérateurs maximaux dissipatifs). *Un opérateur linéaire A sur un domaine $D(A) \subset K$ est dissipatif si pour tout $x \in D(A)$, pour tout $\lambda > 0$, $\|x - \lambda Ax\|_K \geq \|x\|_K$. S'il vérifie de plus que pour tout $\lambda > 0$, l'opérateur $Id_K - \lambda A$ est surjectif, on dit qu'il est maximal dissipatif.*

On peut montrer plusieurs résultats associés aux opérateurs dissipatifs.

Proposition 4.7. *Soit $(A, D(A))$ un opérateur dissipatif, alors*

- Pour tout $\lambda > 0$, l'opérateur $Id_K - \lambda A$ est injectif.
- S'il existe $\lambda_0 > 0$, tel que l'opérateur $Id_K - \lambda_0 A$ est surjectif alors $(A, D(A))$ est maximal dissipatif.
- Si K est un espace de Hilbert, alors $(A, D(A))$ est maximal dissipatif si et seulement si pour tout $x \in D(A)$, on a $\langle Ax, x \rangle \leq 0$.
- Si $(A, D(A))$ est maximal dissipatif alors pour tout $\lambda > 0$, l'opérateur $Id_K - \lambda A$ est un isomorphisme dans $\mathcal{L}(D(A), K)$. On note $J_\lambda = (Id_K - \lambda A)^{-1}$ la résolvante de A .

Théorème 4.8 (Hille-Yosida). *Soient K un espace de Banach et $A \in \mathcal{L}(K, K)$ défini sur $D(A)$. On a l'équivalence entre*

- $(A, D(A))$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu qui est de contraction.
- $(A, D(A))$ est maximal dissipatif à domaine $D(A)$ dense dans K .

Si K est un espace de Hilbert, la condition de densité peut être omise.

On obtient directement une caractérisation des solutions d'une équation aux dérivées partielles linéaire si l'espace de Banach K est un espace de Hilbert noté H . Dès que $(A, D(A))$ est maximal dissipatif, alors par le Théorème 4.8, il est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contraction. Ainsi par le Théorème 4.5 pour toute condition initiale $x \in D(A)$ (qui est bien dense dans H) il existe une unique solution $X : t \mapsto X(t) \in C^1(\mathbb{R}_+; H)$ de l'Équation (13). Et par le Théorème 4.4 on peut l'écrire sous la forme $X : t \mapsto S(t)x$. Cette forme s'étend naturellement à l'espace H tout entier par continuité et densité, ce qui pourrait permettre de définir une forme de solution, *a priori* non dérivable.

Il existe également une forme de solution qu'on appelle faible et qui utilise l'adjoint de l'opérateur A .

Définition 4.9 (Opérateur Adjoint). *Soit $(A, D(A))$ un opérateur de $\mathcal{L}(K, K)$ tel que $D(A)$ est dense dans K . On appelle opérateur adjoint la donnée du couple $(A^*, D(A^*))$ telle que*

$$D(A^*) := \{\xi \in K' : \exists C_\xi \in \mathbb{R}_+ \text{ tel que } \forall x \in D(A), \langle \xi, Ax \rangle_{K', K} \leq C_\xi \|x\|_K\}$$

et

$$A^* : \begin{array}{l} D(A^*) \rightarrow K' \\ \xi \mapsto A^*\xi := \begin{cases} K \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \langle \xi, Ax \rangle_{K', K} \end{cases} \end{array}$$

Remarque 4.10. *Notez bien que pour que cette définition soit valide, la forme linéaire $A^*\xi$ doit bien être définie sur K tout entier. Mais pourtant l'opérateur A n'agissant que sur $D(A)$, sa définition n'est valide que sur le sous-ensemble $D(A)$ de K . On peut tout à fait prolonger sa définition sur K tout entier (par exemple en mettant la valeur 0 sur $K \setminus D(A)$, mais on n'obtiendrait pas un prolongement adéquat). Par la définition de $D(A^*)$ on sait que la forme linéaire $A^*\xi$ est continue de norme C_ξ , et donc on veut prolonger $A^*\xi$ par continuité. C'est la condition de densité de $D(A)$ dans K qui permet de définir un prolongement continu de $A^*\xi$ sur K tout entier. On note abusivement ce prolongement $A^*\xi$ et la définition devient valide.*

On peut alors transposer l'Équation (13) sous une forme faible.

Définition 4.11 (Solution faible). *Soit $(A, D(A))$ un opérateur de $\mathcal{L}(K, K)$ tel que $D(A)$ est dense dans K . Soit X une fonction de $[0, T]$ à valeurs dans un espace de Banach K . On dit que X est une solution faible de l'Équation (13) si pour tout instant $t \in [0, T]$ et pour tout $\xi \in D(A^*)$ on a*

$$\langle \xi, X(t) \rangle_{K', K} = \langle \xi, X_0 \rangle_{K', K} + \int_0^t \langle A^* \xi, X(s) \rangle_{K', K} ds.$$

Cette définition est une notion classique de la littérature en théorie des équations aux dérivées partielles. Elle est introduite ici car elle se généralise bien au cas des équations aux dérivées partielles stochastiques (voir Définition 4.15 et Proposition 4.16).

Proposition 4.12. *Soient $(A, D(A))$ un opérateur maximal dissipatif à domaine $D(A)$ dense dans K , et X l'unique solution régulière de l'Équation (13) pour la donnée initiale $X_0 \in D(A)$. Alors X est une solution faible de l'Équation (13).*

4.2. Semi-groupe pour les ÉDP stochastiques linéaires dirigées par un bruit blanc espace-temps

On souhaite résoudre l'équation aux dérivées partielles dans un espace de Hilbert H . Elle pourrait s'écrire sous la forme abstraite

$$dX_t = AX_t dt + dW_t, \tag{14}$$

avec une condition initiale $X_0 \in H$, $\{W(t)\}_{t \in [0, T]}$ un processus de Wiener cylindrique sur H et $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ un opérateur linéaire. On va supposer que A engendre un semi-groupe fortement continu $\{S(t)\}_{t \in [0, T]}$, ou que l'opérateur A est maximal dissipatif. L'existence de solutions semble assurée si on sait transposer le flot des solutions avec une méthode de variation de la constante, i.e. une formule de Duhamel. On a la proposition suivante, qui est également une définition de la convolution stochastique.

Proposition 4.13. *Soit $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ un opérateur linéaire qui génère un semi-groupe fortement continu $\{S(t)\}_{t \in [0, T]}$ tel que*

$$\int_0^T \|S(t)\|_{\mathcal{L}_2(H, H)}^2 dt < +\infty. \tag{15}$$

Alors pour tout $t \in [0, T]$ la variable aléatoire suivante existe dans $L^2(\Omega; H)$

$$\int_0^t S(t-s) dW_s$$

et est appelée convolution stochastique entre S et W , souvent notée W_A .

La Proposition 4.13 semble indiquer qu'une solution existe via une formule de Duhamel, sous une forme impliquant une intégrale en temps. On pourra se référer à l'Exercice 2.8 du Chapitre 2 qui traite les solutions dans le cas de la dimension finie. On a la définition suivante :

Définition 4.14 (Solution mild). *Soit $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ un opérateur linéaire qui génère un semi-groupe fortement continu $\{S(t)\}_{t \in [0, T]}$ tel que l'Équation (15) est vérifiée. On appelle "solution mild" le processus stochastique dans H noté $\{X^{mild}(t)\}_{t \in [0, T]}$ tel que*

$$X^{mild} : \begin{array}{ll} [0, T] & \rightarrow L^2(\Omega; H) \\ t & \mapsto S(t)X_0 + \int_0^t S(t-s)dW_s. \end{array}$$

Le terme de "solution mild" se réfère à une notion de solution un peu plus forte que la notion de solution faible classique, dont voici la définition. En français, on parle de solution intégrale ou de solution douce, mais le terme anglais "mild" est beaucoup plus usité.

Définition 4.15 (Solution faible). Soient $T \in \mathbb{R}_+$ et $\{X(t)\}_{t \in [0, T]}$ un processus stochastique à valeur dans \mathbb{H} , on dit que X est une solution faible de l'Équation (14) si pour tout instant $t \in [0, T]$ et pour tout $\xi \in D(A^*)$ on a

$$\langle \xi, X(t) \rangle_{\mathbb{H}} = \langle \xi, X_0 \rangle_{\mathbb{H}} + \int_0^t \langle A^* \xi, X(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds + \langle \xi, W(t) \rangle.$$

Proposition 4.16. Soient $(A, D(A))$ un opérateur maximal dissipatif à domaine $D(A)$ dense dans \mathbb{H} , et X^{mild} la “solution mild” de donnée initiale $X_0 \in D(A)$. Alors X^{mild} est aussi une solution faible de l'Équation (14). De plus, on a pour tout $t \in [0, T]$

$$\mathbb{E} \|X^{mild}(t)\|_{\mathbb{H}}^2 = \mathbb{E} \|S(t)X_0\|_{\mathbb{H}}^2 + \int_0^t \|S(s)\|_{\mathcal{L}_2(\mathbb{H}, \mathbb{H})}^2 ds.$$

Cette définition de solution faible (sous une forme alternative) et l'estimation de la norme $\mathbb{E} \|X(t)\|_{\mathbb{H}}^2$ seront utilisées plus tard dans l'étude des équations aux dérivées partielles stochastiques sous forme variationnelle en Sous-Sections 5.3. et 5.4.

4.3. L'équation de la chaleur stochastique sur le cube avec des conditions de Dirichlet homogènes dirigée par un bruit blanc espace-temps

Soit $\mathcal{D} = [0, 1]^n$ le cube en dimension n . On pose A la réalisation de l'opérateur Laplacien Δ dans ce domaine avec des conditions de Dirichlet homogènes sur la frontière $\partial\mathcal{D}$. On sait que A est un opérateur non borné, fermé, auto-adjoint, négatif, d'inverse compact. En particulier il existe $(e_k)_{k \geq 1}$ une base hilbertienne orthonormée de l'espace de Hilbert $\mathbb{H} := L^2(\mathcal{D})$, et une famille $(\lambda_k)_{k \geq 1}$ de réels positifs tels que $Ae_k = -\lambda_k e_k$, c'est-à-dire que pour tout $k \geq 1$, $-\lambda_k$ est une valeur propre de l'opérateur A associée au vecteur propre e_k . Le domaine de l'opérateur A est $D(A) := H^2(\mathcal{D}) \cap H_0^1(\mathcal{D})$. L'opérateur A est maximal dissipatif et son domaine est dense dans $\mathbb{H} := L^2(\mathcal{D})$. En effet, on a par intégration par parties que pour tout $u \in D(A)$

$$\langle Au, u \rangle = \int_{\mathcal{D}} \Delta u \, u = - \int_{\mathcal{D}} \nabla u \cdot \nabla u \leq 0. \quad (16)$$

Et de plus pour tout $\lambda > 0$ et pour tout $f \in L^2(\mathcal{D})$ il existe une unique solution dans $D(A)$ à l'équation

$$x - \lambda Ax = f$$

par application du théorème de Lax-Milgram. Par le Théorème 4.8, $(A, D(A))$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu qui est de contraction et qu'on note $\{S(t)\}_{t \in \mathbb{R}_+}$. Pour tout $t > 0$, le semi-groupe est Hilbert-Schmidt, car on peut calculer explicitement les valeurs propres de A (et donc celles de $S(t)$). Elle sont données par la famille $-(k_1^2 + \dots + k_n^2)\pi^2$ avec $k = (k_1, \dots, k_n)$ un multi-indice dans \mathbb{N}^n . Si le semi-groupe vérifie la condition (15) alors on pourra définir la convolution stochastique entre S et W un processus de Wiener cylindrique sur $L^2(\mathcal{D})$. Or $A = A^*$ d'où $S(t) = S(t)^*$, ce qui amène

$$\begin{aligned} \int_0^T \|S(t)\|_{\mathcal{L}_2(L^2(\mathcal{D}), L^2(\mathcal{D}))}^2 dt &= \int_0^T \text{Tr}(S(t)S(t)^*) dt \\ &= \int_0^T \sum_{k \geq 1} \exp(-2\lambda_k t) dt = \sum_{k \geq 1} \frac{1 - \exp(-2\lambda_k T)}{2\lambda_k}. \end{aligned}$$

En dimension n , on peut obtenir un équivalent des valeurs propres du Laplacien indexées sur \mathbb{N} et non plus sur \mathbb{N}^n . Cet équivalent est donné par $\lambda_k \sim Ck^{2/n}$. De fait la série précédente n'est convergente que lorsque la dimension $n = 1$. C'est en réalité une condition nécessaire et on a le théorème suivant

Théorème 4.17. *L'équation de la chaleur linéaire, sur $\mathcal{D} := [0, 1]^n$, avec des conditions de Dirichlet homogènes sur la frontière $\partial\mathcal{D}$, perturbée par un bruit blanc espace-temps additif caractérisé par un processus de Wiener cylindrique, admet une unique solution mild dans $L^2(\mathcal{D})$ si et seulement si la dimension de l'espace \mathcal{D} est $n = 1$.*

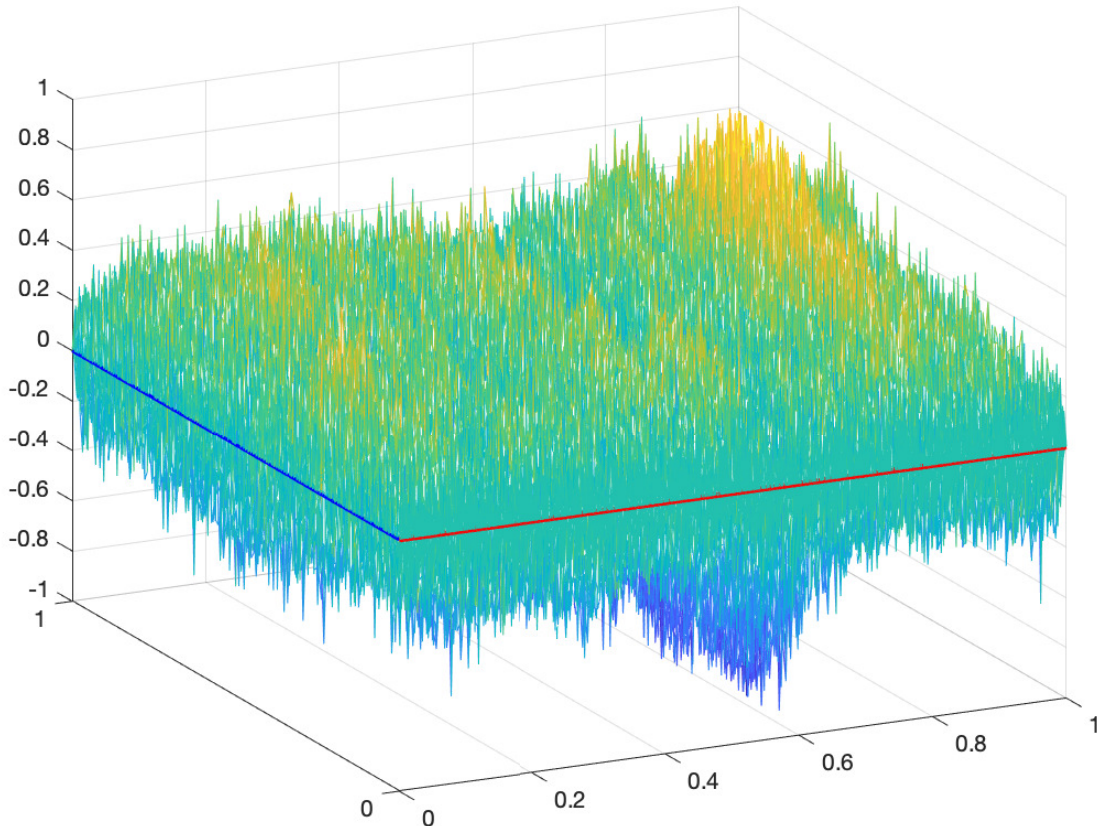


FIGURE 6. Une trajectoire temps-espace de la solution de l'équation de la chaleur stochastique avec des conditions de Dirichlet homogènes sur le domaine $[0, 1]$. La ligne bleue est l'instant $t = 0$. Le temps s'écoule de la gauche vers la droite. La ligne rouge est le bord $x = 0$ du domaine $[0, 1]$.

Remarque 4.18. *En dimension $n > 1$, on peut plonger les solutions dans des espaces de Sobolev d'ordre négatif, via la théorie des distributions. Mais cette extension se généralise mal au cas non-linéaire. Pour cette raison, on doit développer une théorie permettant de gérer certains produits de distributions moyennant une renormalisation, et on pourra consulter les références [4] et [6] pour les articles fondateurs relatifs aux distributions para-contrôlées et aux structures de régularité.*

Remarque 4.19. *On peut étendre ces résultats aux équations aux dérivées partielles stochastiques de la forme*

$$dX_t = AX_t dt + F(X_t) dt + \Sigma dW_t,$$

avec $F : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ une application Lipschitzienne et Σ un opérateur linéaire sur \mathbb{H} . On pourra consulter [Bré14] pour plus de détails.

4.4. Exercices sur le chapitre 4

Exercice 4.1. Soit $A \in \mathcal{L}_c(\mathbb{H}; \mathbb{H})$. Soient une base orthonormée $(e_k)_{k \geq 1}$ de \mathbb{H} et une suite $(\lambda_k)_{k \geq 1}$ de réels positifs telle que $Ae_k = -\lambda_k e_k$. Soit un opérateur $R \in \mathcal{L}_c(\mathbb{H}; \mathbb{H})$ tel que $Re_k = r_k e_k$ pour tout $k \geq 1$. On suppose

$$\sum_{k \geq 1} r_k^2 < +\infty \quad \text{et} \quad \sum_{k \geq 1} \lambda_k^{-1} < +\infty.$$

On pose pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ le processus

$$Z(t) = \int_0^t e^{(t-s)A} R dW_s.$$

- Montrer, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, que la variable aléatoire $Z(t)$ existe dans $L^2(\Omega; \mathbb{H})$.
- Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, calculer la moyenne de $Z(t)$ et l'opérateur $C(t)$ de covariance de $Z(t)$ tel que pour tout $h_1, h_2 \in \mathbb{H}$

$$\text{Cov}(h_1, h_2) := \mathbb{E}[\langle Z(t), h_1 \rangle_{\mathbb{H}} \langle Z(t), h_2 \rangle_{\mathbb{H}}] := \langle C(t)h_1, h_2 \rangle_{\mathbb{H}}.$$

- Quelle est l'équation aux dérivées partielles stochastique vérifiée par Z ?
- Montrer que le processus stochastique Z est une solution faible.

5. ÉDP STOCHASTIQUES LINÉAIRES AVEC BRUIT MULTIPLICATIF

5.1. Intégrale stochastique contre une martingale dans un espace de Hilbert

Contrairement à la partie précédente, on va maintenant considérer des bruits plus réguliers dans nos équations aux dérivées partielles, c'est-à-dire des martingales à valeurs dans H , et non plus des processus de Wiener cylindriques. On peut y voir une manière de modéliser de la corrélation spatiale en ajoutant un opérateur linéaire Σ devant W pour résoudre

$$dX_t = AX_t dt + \Sigma dW_t.$$

On va en premier décrire une formule d'Itô en dimension infinie qui nous permettra de calculer la quantité $\mathbb{E}\|X(t)\|_H^2$ sans utiliser la théorie des semi-groupes. On pourra alors introduire une approche variationnelle pour résoudre notre équation aux dérivées partielles stochastique, et considérer des opérateurs A agissant sur un sous-espace V de H , et non plus sur un domaine $D(A)$.

Dans tout ce chapitre, on se place dans le cadre suivant. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité équipé d'une filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$. Soit H un espace de Hilbert et $\{M_t\}_{t \in [0, T]}$ une martingale continue à valeurs dans H telle que $\sup_{t \in [0, T]} \mathbb{E}[\|M_t\|_H^2] < +\infty$ dans le sens rappelé dans [Mé82, Chapitre 2 et Chapitre 4].

Le but est de montrer que l'intégrale

$$\int_0^T \langle \phi_t, dM_t \rangle$$

est bien définie pour certains processus $\{\phi_t\}_{t \in [0, T]}$, et qu'on peut faire du calcul stochastique d'Itô. En premier on doit introduire les notions de crochet de martingales et crochet \mathcal{L}^1 en dimension infinie. On pourra consulter [Mé82] pour plus de détails.

Définition 5.1 (Crochet de martingale). *Comme $\{\|M_t\|_H^2\}_{t \in [0, T]}$ est une sous-martingale réelle continue alors il existe un unique processus croissant continu à valeurs réelles, adapté à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]}$, noté $\{\langle M \rangle_t\}_{t \in [0, T]}$ tel que $\{\|M_t\|_H^2 - \langle M \rangle_t\}_{t \in [0, T]}$ soit une martingale. On appelle ce processus le crochet de la martingale.*

Le crochet de la martingale M va apparaître dans la formule d'Itô, mais on va avoir besoin d'un autre crochet pour écrire la formule. De plus, comme on est en dimension infinie, la différentielle est une forme linéaire sur H , et on va utiliser le théorème de Riesz pour représenter un élément de H' par un élément de H .

Définition 5.2. *Soit j l'isométrie canonique du théorème de Riesz entre H et H' telle que*

$$j : \begin{array}{l} H \rightarrow H' \\ h \mapsto \left(\begin{array}{l} H \rightarrow \mathbb{R} \\ k \mapsto \langle h, k \rangle \end{array} \right). \end{array}$$

Pour tout élément M de H , on définit l'opérateur linéaire $M \otimes M$ tel que

$$M \otimes M : \begin{array}{l} H \rightarrow H \\ h \mapsto j^{-1} \left(\begin{array}{l} H \rightarrow \mathbb{R} \\ k \mapsto \langle M, h \rangle \langle M, k \rangle \end{array} \right) \end{array}$$

Ces définitions d'objets classiques permettent maintenant de définir un crochet qui est un opérateur linéaire de trace finie. On note \mathcal{L}^1 l'espace des opérateurs de trace finie.

Théorème 5.3 (Crochet \mathcal{L}^1 - Métivier-Pistone). *Il existe un unique processus croissant continu, adapté à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]}$, à valeurs dans les opérateurs linéaires de H auto-adjoints semi-définis positifs de trace finie, noté $\{\langle \langle M \rangle \rangle_t\}_{t \in [0, T]}$ tel que $\{M_t \otimes M_t - \langle \langle M \rangle \rangle_t\}_{t \in [0, T]}$ soit une martingale. De plus, il existe un unique processus prévisible à valeurs dans les opérateurs linéaires de H auto-adjoints semi-définis positifs de trace finie,*

noté $\{Q_t\}_{t \in [0, T]}$ tel que pour tout $0 \leq t \leq T$, on ait

$$\langle\langle M \rangle\rangle_t = \int_0^t Q_s d\langle M \rangle_s.$$

Enfin $Tr(Q_t) = 1$ pour presque tout $0 \leq t \leq T$, presque sûrement.

Le théorème précédent permet de faire le lien entre le crochet de martingale de la Définition 5.1 et une forme de carré d'opérateur $(M_t \otimes M_t)$ à trace finie. En effet, par définition $M_t \otimes M_t - \langle\langle M \rangle\rangle_t$ est une martingale dans les opérateurs, on va en calculer la trace, qui sera une martingale réelle, pour la relier au crochet de martingale $\langle M \rangle_t$. Pour $(e_k)_{k \geq 1}$ une base hilbertienne orthonormée de \mathbb{H} , on obtient que

$$\begin{aligned} Tr(M_t \otimes M_t - \langle\langle M \rangle\rangle_t) &= \sum_{k \geq 1} \langle (M_t \otimes M_t) e_k, e_k \rangle_{\mathbb{H}} - Tr(\langle\langle M \rangle\rangle_t) \\ &= \sum_{k \geq 1} \langle M_t, e_k \rangle_{\mathbb{H}} \langle M_t, e_k \rangle_{\mathbb{H}} - Tr(\langle\langle M \rangle\rangle_t) \\ &= \sum_{k \geq 1} |\langle M_t, e_k \rangle_{\mathbb{H}}|^2 - Tr(\langle\langle M \rangle\rangle_t) \\ &= \|M_t\|_{\mathbb{H}}^2 - Tr(\langle\langle M \rangle\rangle_t) \end{aligned}$$

est une martingale réelle. De fait, par unicité du crochet de la martingale $\{M_t\}_{t \in [0, T]}$ on a l'identité

$$Tr(\langle\langle M \rangle\rangle_t) = \langle M \rangle_t$$

pour tout $t \in [0, T]$ d'où l'égalité des processus

$$\langle M \rangle_t = \int_0^t Tr(Q_s) d\langle M \rangle_s \quad \text{ou encore} \quad \int_0^t (Tr(Q_s) - 1) d\langle M \rangle_s = 0.$$

On retrouve bien la condition $Tr(Q_t) = 1$ pour presque tout $0 \leq t \leq T$. Grâce à cette représentation du crochet dans \mathcal{L}^1 , on peut définir une intégrale stochastique à valeurs dans \mathbb{H} qui soit une martingale.

Définition 5.4. Soit $\{\phi_t\}_{t \in [0, T]}$ un processus prévisible à valeurs dans \mathbb{H} tel que

$$\mathbb{P} \left[\int_0^T \langle Q_t \phi_t, \phi_t \rangle_{\mathbb{H}} d\langle M \rangle_t < +\infty \right] = 1,$$

alors on peut définir l'intégrale stochastique de $\{\phi_t\}_{t \in [0, T]}$ contre la martingale $\{M_t\}_{t \in [0, T]}$ par la formule suivante, avec $t_i = i\Delta t$,

$$\int_0^T \langle \phi_s, dM_s \rangle := \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{i \geq 1} \left\langle \frac{1}{\Delta t} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \phi_s ds, M_{t_{i+1} \wedge T} - M_{t_i \wedge T} \right\rangle_{\mathbb{H}},$$

où la limite est une limite en probabilité.

Cette intégrale stochastique n'est encore une fois définie que comme une limite en probabilité, et elle n'est a priori pas de carré intégrable. On a la proposition suivante :

Proposition 5.5. Le processus $\left\{ \int_0^t \langle \phi_s, dM_s \rangle \right\}_{t \in [0, T]}$ est bien défini en tant que martingale locale réelle continue dont le crochet vérifie

$$\left\langle \int_0^{\cdot} \langle \phi_s, dM_s \rangle \right\rangle_t = \int_0^t \langle Q_s \phi_s, \phi_s \rangle_{\mathbb{H}} d\langle M \rangle_s.$$

De plus, si son crochet est intégrable, c'est-à-dire si

$$\mathbb{E} \left[\int_0^t \langle Q_s \phi_s, \phi_s \rangle_{\mathbb{H}} d\langle M \rangle_s \right] < +\infty,$$

alors le processus $\left\{ \int_0^t \langle \phi_s, dM_s \rangle \right\}_{t \in [0, T]}$ est une vraie martingale qui est de carré intégrable, et on a la formule d'isométrie suivante

$$\mathbb{E} \left[\left(\int_0^T \langle \phi_t, dM_t \rangle \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left[\int_0^T \langle Q_t \phi_t, \phi_t \rangle_{\mathbb{H}} d\langle M \rangle_t \right].$$

Remarque 5.6. Lorsque la martingale M n'est pas à valeurs dans \mathbb{H} mais est un processus de Wiener cylindrique sur \mathbb{H} , alors on peut définir formellement toutes ces quantités avec l'identification formelle $Q = Id$, où l'opérateur identité Id n'est évidemment pas un opérateur à trace finie dans \mathbb{H} (voir Exercice 5.2).

Maintenant qu'on sait définir une intégrale stochastique, l'étape suivante concerne l'élaboration d'une formule d'Itô dans \mathbb{H} . On a le résultat suivant :

Théorème 5.7 ([Par21, Chap. 2]). Soit $\{X_t\}_{t \in [0, T]}$ un processus d'Itô à valeur dans \mathbb{H} donné par

$$X_t = X_0 + \int_0^t \psi(s, \cdot) ds + M_t,$$

avec $\mathbb{P} \left[\int_0^t \|\psi(s, \cdot)\|_{\mathbb{H}} ds < +\infty, \forall t \geq 0 \right] = 1$. Soit $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{H}; \mathbb{R})$ telle que pour tout opérateur $Q \in \mathcal{L}^1$ l'application

$$T_{Q,g} := \begin{array}{ccc} \mathbb{H} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ h & \mapsto & Tr(D^2g[h]Q) \end{array}$$

soit continue, où $D^2g[h]$ est la Hessienne de g dans la direction $h \in \mathbb{H}$, alors le processus stochastique $\{Y_t\}_{t \in [0, T]}$ défini pour tout $t \in [0, T]$ par $Y_t = g(X_t)$ est un processus d'Itô et l'on a pour tout $t \in [0, T]$ presque sûrement :

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t Dg[X_s](\psi(s, \cdot)) ds + \int_0^t \langle j^{-1}(Dg[X_s]), dM_s \rangle + \frac{1}{2} \int_0^t Tr(D^2g[X_s]Q_s) d\langle M \rangle_s,$$

où j est l'isométrie depuis une réalisation du dual de \mathbb{H} (réalisation identifiée avec \mathbb{H}), c'est-à-dire l'application qui identifie un élément de \mathbb{H} comme une forme linéaire sur \mathbb{H} .

Il existe un exemple fondamental en prenant pour g la norme $\|\cdot\|_{\mathbb{H}}^2$ sur \mathbb{H} . Dans ce cas, on obtient

$$\|X_t\|_{\mathbb{H}}^2 = \|X_0\|_{\mathbb{H}}^2 + 2 \int_0^t \langle X_s, \psi(s, \cdot) \rangle_{\mathbb{H}} ds + 2 \int_0^t \langle X_s, dM_s \rangle + \langle M \rangle_t$$

car on a bien $D^2g[h] = 2I_d$ pour tout $h \in \mathbb{H}$, $Tr(I_d Q_s) = 1$ pour tout $s \in [0, t]$ pour tout $t \in [0, T]$, $Dg[X_s] = (h \mapsto 2\langle X_s, h \rangle)$ et $j^{-1}(Dg[X_s]) = 2X_s$. Enfin la condition

$$\begin{aligned} \int_0^T \langle Q_t j^{-1}(Dg[X_t]), j^{-1}(Dg[X_t]) \rangle_{\mathbb{H}} d\langle M \rangle_t &= \int_0^T \langle Q_t 2X_t, 2X_t \rangle_{\mathbb{H}} d\langle M \rangle_t \\ &= 4 \int_0^T \left\langle Q_t \frac{X_t}{\|X_t\|_{\mathbb{H}}}, \frac{X_t}{\|X_t\|_{\mathbb{H}}} \right\rangle_{\mathbb{H}} \|X_t\|_{\mathbb{H}}^2 d\langle M \rangle_t \\ &\leq 4 \int_0^T Tr(Q_t) \|X_t\|_{\mathbb{H}}^2 d\langle M \rangle_t \\ &= 4 \int_0^T \|X_t\|_{\mathbb{H}}^2 d\langle M \rangle_t < +\infty \end{aligned}$$

est bien vérifiée en probabilité dès que le processus $\{X_t\}_{t \in [0, T]}$ est de carré intégrable contre le crochet de $\{M_t\}_{t \in [0, T]}$ (notez que toutes les quantités sont bien positives ici).

5.2. Exercices sur la Sous-section 5.1

Exercice 5.1. Soit Q un opérateur linéaire auto-adjoint semi-défini positif de trace finie. Montrer que le processus $\{W_t^Q\}_{t \in [0, T]}$ défini pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ par

$$W_t^Q = \sum_{k \geq 1} B_t^k Q^{1/2} e_k$$

est une martingale de carré intégrable dont le crochet de martingale est $\langle W^Q \rangle_T = Tr(Q) \times t$, et dont le crochet \mathcal{L}^1 est $Q_t = \frac{Q}{Tr(Q)}$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.

Exercice 5.2. Montrer que le processus de Wiener cylindrique $\{W_t\}_{t \in [0, T]}$ défini par

$$W_t = \sum_{k \geq 1} B_t^k e_k$$

possède formellement un crochet \mathcal{L}^1 qui est $\langle\langle W \rangle\rangle_T = I_d \times t$, mais l'opérateur identité I_d n'est pas de trace finie sur \mathbb{H} .

Exercice 5.3. Soit $\{W_t\}_{t \in [0, T]}$ un processus de Wiener cylindrique dans \mathbb{H} défini dans l'Exercice 5.2. Soit $\{\phi_t\}_{t \in [0, T]}$ un processus prévisible à valeurs dans \mathbb{H} tel que

$$\mathbb{P} \left[\int_0^T \langle \phi_t, \phi_t \rangle_{\mathbb{H}} dt < +\infty \right] = 1.$$

Montrer qu'on peut définir une intégrale stochastique de $\{\phi_t\}_{t \in [0, T]}$ contre $\{W_t\}_{t \in [0, T]}$ par la formule suivante

$$\begin{aligned} (\phi \cdot W)_T &:= \left(\int_0^T \langle \phi_s, dW_s \rangle \right) := \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{j \in \mathbb{N}} \left\langle \frac{1}{\Delta t} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \phi_s ds, W_{t_{j+1} \wedge T} - W_{t_j \wedge T} \right\rangle_{\mathbb{H}} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{j \in \mathbb{N}} \lim_{d \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^d \frac{1}{\Delta t} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \langle \phi_s, e_i \rangle_{\mathbb{H}} ds (B_{t_{j+1} \wedge T}^k - B_{t_j \wedge T}^k) \\ &= \lim_{d \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^d \int_0^T \langle \phi_s, e_k \rangle_{\mathbb{H}} dB_s^k \end{aligned}$$

où la limite est une limite en probabilité.

5.3. Approche variationnelle pour les équations aux dérivées partielles linéaires

Soit A un opérateur linéaire sur H non borné. Pour ce type d'opérateurs, on considère normalement le domaine $D(A)$ sur lequel l'opérateur est bien défini et on suppose souvent qu'il est dense dans H (voir la Sous-Section 4.1 pour l'utilisation de tels opérateurs pour les équations aux dérivées partielles stochastiques). Mais ici, on va utiliser une extension développée entre autres par Jacques-Louis Lions. On se fixe un triplet de Gelfand (V, H, V') où V est un espace de Banach, réflexif, séparable, dense dans un espace de Hilbert H , et V' son espace topologique dual. Dans ce contexte, H est alors identifié avec son dual par le théorème de Riesz, et on a la relation

$$V \subset H \sim H' \subset V',$$

où chaque inclusion est continue. On considère un opérateur A continu sur V mais à valeurs dans V' et non plus dans H . Généralement $D(A) \subset V$ et V lui-même peut être un espace de Hilbert. Par exemple, dans le cas de l'équation de la chaleur stochastique de la Sous-Section 4.3, l'espace V pourrait être l'espace $H_0^1(\mathcal{D})$ et $V' = H^{-1}(\mathcal{D})$. C'est la formule d'intégration par parties de l'Équation (16) qui décrit le crochet de dualité $\langle \cdot, \cdot \rangle_{V', V}$ entre V' et V . On pose les normes associées à ces espaces sous les notations $\| \cdot \|_H$, $\| \cdot \|_V$ et pour tout $v \in V'$

$$\|v\|_{V'} := \sup_{u \in V, \|u\|_V \leq 1} \langle v, u \rangle_{V', V}.$$

On peut considérer sans perte de généralité que pour tout $u \in V$, on a

$$\|u\|_{V'} \leq \|u\|_H \leq \|u\|_V. \tag{17}$$

On va également supposer qu'il existe une famille $(e_k)_{k \geq 1}$ qui est une base orthonormée dans H composée d'éléments de V . Ce sera souvent le cas dans plusieurs exemples d'équations aux dérivées partielles classiques. On peut même parfois se ramener à l'existence d'une base très régulière composée de vecteurs propres de l'opérateur A .

Remarque 5.8. *On remarque ici que si V était un Hilbert strictement plus petit que H , par exemple $V = H_0^1(\mathcal{D})$, alors il ne serait pas identifiable canoniquement avec son dual $V' = H^{-1}(\mathcal{D})$ contrairement à l'identification $H \sim H'$. On pourra consulter [Bre11, Remarque 3, après Théorème 5.5] pour une explication plus complète de cette non-identification simultanée d'espaces de Hilbert. On prendra aussi garde à ne pas confondre les crochets de dualité $\langle v, u \rangle_{V', V}$ avec les produits scalaires $\langle v, u \rangle_H$ dans H qui coïncident toutefois pour tout $u, v \in V$.*

On suppose que l'opérateur A dans $\mathcal{L}_c(V, V')$ vérifie l'hypothèse de coercivité suivante :

Hypothèse 5.9 (Coercivité). *Il existe deux constantes $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\alpha > 0$ telles que pour tout $u \in V$, on a l'inégalité de coercivité suivante*

$$2\langle Au, u \rangle_{V', V} + \alpha \|u\|_V^2 \leq \lambda \|u\|_H^2.$$

On pourra rapprocher cette hypothèse de la condition de dissipativité décrite dans la Proposition 4.7. Alors on a le théorème suivant (voir [LM68, Chap. 3. Théorème 4.1]) dont on va proposer une ébauche de démonstration qui sera ré-utilisée dans le cas stochastique.

Théorème 5.10. *Soient A un opérateur dans $\mathcal{L}_c(V, V')$ vérifiant l'Hypothèse 5.9, $X_0 \in H$ une donnée initiale et $f \in L^2([0, T]; V')$. Alors l'équation d'évolution*

$$\begin{cases} \frac{dX(t)}{dt} = AX(t) + f(t), \\ X(0) = X_0, \end{cases} \tag{18}$$

admet une unique solution $X \in L^2([0, T]; V)$ qui est également dans $\mathcal{C}([0, T]; H)$.

Proof. Si $X \in L^2([0, T]; V)$ est une solution de (18) alors elle vérifie, pour presque tout $t \in [0, T]$, l'égalité suivante dans V'

$$X(t) = X_0 + \int_0^t (AX(s) + f(s)) ds,$$

c'est-à-dire que pour tout $v \in V$,

$$\langle X(t), v \rangle_{V', V} = \langle X_0, v \rangle_{V', V} + \int_0^t \langle AX(s) + f(s), v \rangle_{V', V} ds.$$

On voit que X est absolument continue à valeurs dans V' . Sa "dérivée" (i.e. sa densité de Radon-Nikodym) est $AX + f \in L^2([0, T]; V')$. Pour démontrer le théorème on va avoir besoin d'un lemme permettant le calcul d'estimations *a priori* sur la norme de X dans H . Ce lemme provient d'une variation de [Lio69, Chap.1, Lemme 1.2].

Lemme 5.11 ([Par21, Chap.2, Lemme 2.8]). *Supposons qu'une fonction $u \in L^2([0, T]; V)$ soit absolument continue à valeurs dans V' telle que $\frac{du}{dt}$ (sa "dérivée") est dans $L^2([0, T]; V')$, telle que pour presque tout $t \in [0, T]$, on ait l'égalité dans V'*

$$u(t) = u_0 + \int_0^t \frac{du(s)}{ds} ds,$$

avec $u_0 \in H$. Alors on a $u \in C([0, T]; H)$ et pour presque tout $t \in [0, T]$ on a

$$\begin{cases} \frac{d\|u(t)\|_H^2}{dt} = 2 \left\langle \frac{du(t)}{dt}, u(t) \right\rangle_{V', V}, \\ \|u(0)\|_H^2 = \|u_0\|_H^2. \end{cases}$$

Démontrons en premier l'unicité dans le théorème. Considérons deux solutions X^1 et X^2 dans $L^2([0, T]; V)$, et posons $w = X^1 - X^2$ qui vérifie l'équation

$$\begin{cases} \frac{dw(t)}{dt} = Aw(t), \\ w(0) = 0, \end{cases}$$

alors par le Lemme 5.11, et l'Hypothèse 5.9, on a

$$\begin{aligned} \|w(t)\|_H^2 &= \int_0^t \frac{d\|w(s)\|_H^2}{ds} ds = 2 \int_0^t \left\langle \frac{dw(s)}{ds}, w(s) \right\rangle_{V', V} ds \\ &= 2 \int_0^t \langle AX^1(s) - AX^2(s), X^1(s) - X^2(s) \rangle_{V', V} ds \\ &\leq \lambda \int_0^t \|X^1(s) - X^2(s)\|_H^2 ds = \lambda \int_0^t \|w(s)\|_H^2 ds. \end{aligned}$$

Le lemme de Grönwall permet de conclure que $w(t) = 0$ pour tout $t \in [0, T]$, d'où l'unicité.

Pour l'existence, on va se ramener en dimension finie par la méthode de Galerkin. On rappelle qu'on a supposé qu'il existait $(e_k)_{k \geq 1}$ une base orthonormée dans H qui est composée d'éléments de V . On définit pour tout $n \in \mathbb{N}$ le sous-espace V_n de dimension finie engendré par la famille $(e_k)_{k=1, \dots, n}$ et Π_n le projecteur orthogonal de V sur V_n . Sur cet espace de dimension finie, on va définir un système d'équations différentielles ordinaires qui approche l'équation aux dérivées partielles (18). On cherche une fonction $X_n \in C([0, T]; V_n)$ telle que pour tout $1 \leq k \leq n$

$$\frac{d}{dt} \langle X_n(t), e_k \rangle_{V', V} = \langle AX_n(t), e_k \rangle_{V', V} + \langle f(t), e_k \rangle_{V', V},$$

avec $\langle X_n(0), e_k \rangle_{V',V} = \langle X_0, e_k \rangle_{V',V}$. Cette équation d'évolution est en réalité un système linéaire de n équations différentielles ordinaires portant sur les coordonnées de $X_n \in V_n$. Si on note $X_n = \sum_{k=1}^n x_{k,n} e_k$ avec $(x_{k,n})_{k=1,\dots,n} \in \mathbb{R}^n$ les coordonnées de X_n , on a le système différentiel linéaire suivant pour tout $t \in [0, T]$:

$$\frac{dx_{k,n}(t)}{dt} = \sum_{\ell=1}^n x_{\ell,n}(t) \langle Ae_\ell, e_k \rangle_{V',V} + \langle f(t), e_k \rangle_{V',V},$$

avec $x_{k,n}(0) = \langle X_0, e_k \rangle_{V',V}$. Ce système admet une unique solution par le théorème de Cauchy-Lipschitz. Par linéarité, la solution X_n vérifie la relation suivante, pour tout $t \in [0, T]$, pour tout $v \in V$

$$\langle X_n(t), v \rangle_{V',V} = \langle X_0, \Pi_n v \rangle_{V',V} + \int_0^t \langle AX_n(s) + f(s), \Pi_n v \rangle_{V',V} ds. \tag{19}$$

Cette solution vérifie également la relation suivante pour tout $t \in [0, T]$

$$\|X_n(t)\|_{\mathbb{H}}^2 = \sum_{k=1}^n \langle X_0, e_k \rangle_{V',V}^2 + 2 \int_0^t \langle AX_n(s) + f(s), X_n(s) \rangle_{V',V} ds.$$

Donc on déduit par l'Hypothèse 5.9 que

$$\|X_n(t)\|_{\mathbb{H}}^2 + \alpha \int_0^t \|X_n(s)\|_{V'}^2 ds \leq \|X_0\|_{\mathbb{H}}^2 + 2 \int_0^t \langle f(s), X_n(s) \rangle_{V',V} ds + \lambda \int_0^t \|X_n(s)\|_{\mathbb{H}}^2 ds.$$

Puis par l'inégalité de Young, avec $2|\langle f(s), X_n(s) \rangle_{V',V}| \leq \frac{2}{\alpha} \|f(s)\|_{V'}^2 + \frac{\alpha}{2} \|X_n(s)\|_{V'}^2$ on obtient

$$\|X_n(t)\|_{\mathbb{H}}^2 + \frac{\alpha}{2} \int_0^t \|X_n(s)\|_{V'}^2 ds \leq \|X_0\|_{\mathbb{H}}^2 + \frac{2}{\alpha} \int_0^t \|f(s)\|_{V'}^2 ds + \lambda \int_0^t \|X_n(s)\|_{\mathbb{H}}^2 ds.$$

Le lemme de Grönwall nous donne l'estimation suivante pour une certaine constante $R \in \mathbb{R}_+$ qui dépend de T, α, λ, f et X_0 ,

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} \|X_n(t)\|_{\mathbb{H}}^2 + \int_0^T \|X_n(t)\|_{V'}^2 dt \right] \leq R < +\infty.$$

La suite de fonctions $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc bornée uniformément dans $L^2([0, T]; V)$. On peut en extraire une sous-suite qui converge faiblement dans $L^2([0, T]; V)$ vers une fonction X . Puisque A est continu de V dans V' , alors il est également continu pour la topologie faible et on peut extraire une sous-suite telle que AX_n converge faiblement vers AX dans $L^2([0, T]; V')$.

Remarquons aussi que la fonction X_n est absolument continue à valeurs dans V' et sa dérivée est $\Pi_n^T(AX_n + f)$ qui converge faiblement vers $AX + f$ dans $L^2([0, T]; V')$. Puisque $\frac{dX_n}{dt}$ converge vers $\frac{dX}{dt}$ au sens des distributions dans $\mathcal{D}'(]0, T[, V)$, alors on a bien $X \in L^2([0, T]; V)$ et $\frac{dX}{dt} = AX + f$ dans $L^2([0, T]; V')$. Soit $\varphi \in L^2([0, T]; V)$, en utilisant la convergence forte $\Pi_n v \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} v$ pour tout $v \in V$ et en passant à la limite $n \rightarrow +\infty$ dans l'Équation (19), on obtient

$$\int_0^T \langle X(t), \varphi(t) \rangle_{V',V} dt = \int_0^T \langle X_0, \varphi(t) \rangle_{V',V} dt + \int_0^T \int_0^t \langle AX(s) + f(s), \varphi(t) \rangle_{V',V} ds dt.$$

Donc X est bien solution de l'Équation (18) au sens faible dans $L^2([0, T]; V)$. Le Lemme 5.11 implique que X est continue dans \mathbb{H} , et on peut donc écrire $X(0) = X_0$ sans ambiguïté. \square

Remarque 5.12. *Il existe des moyens de considérer des opérateurs non-linéaires, mais il faut ajouter des hypothèses en plus de la coercivité. Une approche, dite de “monotonie” considère un opérateur monotone et héli-continu, c’est-à-dire vérifiant la relation suivante pour une certaine constante $\mu \in \mathbb{R}$, pour tout $u, v \in V$,*

$$\langle A(u) - A(v), u - v \rangle_{V',V} \leq \mu \|u - v\|_H^2,$$

et vérifiant que, pour tout $u, v, w \in V$, la fonction réelle à valeurs réelles $\Theta : \theta \mapsto \langle A(u + \theta v), w \rangle_{V',V}$ est continue. Une autre approche, dite de “compacité”, suppose que l’injection de V dans H est compacte, ce qui permet d’extraire une sous-suite fortement convergente dans H . On pourra consulter [Lio69] pour une présentation de quelques méthodes de monotonie, de compacité, de régularisation et de pénalisation.

5.4. Approche variationnelle pour les équations aux dérivées partielles stochastiques linéaires avec bruit multiplicatif

On va continuer de suivre l’approche variationnelle développée dans la section précédente pour traiter des équations aux dérivées partielles stochastiques perturbées par des martingales de carré intégrables. Devant le bruit, on va considérer une perturbation non-linéaire, plus exactement, on va traiter le cas de bruits multiplicatifs. On ne traitera pas le problème en toute généralité, mais simplement une version simplifiée pour illustrer la méthode d’existence.

On souhaite résoudre l’équation aux dérivées partielles stochastique suivante

$$dX_t = AX_t dt + \Sigma(X_t) dW_t \tag{20}$$

avec la donnée initiale $X(0) = X_0 \in H$. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité équipé d’une filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$. Soit $\{W(t)\}_{t \in [0, T]}$ un processus de Wiener cylindrique sur H donné par la Définition 3.3. On considère un opérateur A dans $\mathcal{L}_c(V, V')$, et un opérateur Σ de V dans les opérateurs Hilbert-Schmidt $\mathcal{L}_2(H, H)$.

On recherche des processus solutions $\{X(t)\}_{t \in [0, T]}$ dont les trajectoires sont presque sûrement dans $L^2([0, T]; V)$, alors $\{AX(t)\}_{t \in [0, T]}$ est bien presque sûrement dans $L^2([0, T]; V')$ ce qui va permettre d’utiliser une forme faible comme dans le Théorème 5.10. De même, $\{\Sigma(X(t))\}_{t \in [0, T]}$ sera presque sûrement dans $L^2([0, T])$ à valeur dans les opérateurs Hilbert-Schmidt $\mathcal{L}_2(H, H)$. On peut donc comprendre l’équation aux dérivées partielles stochastique (20) sous la forme faible suivante telle que pour tout $t \in [0, T]$, pour tout $v \in V$

$$\langle X(t), v \rangle_{V',V} = \langle X_0, v \rangle_{V',V} + \int_0^t \langle AX(s), v \rangle_{V',V} ds + \sum_{k \geq 1} \int_0^t \langle \Sigma(X(s)) e_k, v \rangle_H dB_s^k.$$

Comme dans le cas déterministe on va demander une hypothèse de coercivité sur l’opérateur A , mais également sur l’opérateur Σ devant le bruit.

Hypothèse 5.13 (Coercivité). *Il existe trois constantes $\lambda \in \mathbb{R}, \nu \in \mathbb{R}$ et $\alpha > 0$ telles que pour tout $u \in V$*

$$2\langle Au, u \rangle_{V',V} + \|\Sigma(u)\|_{\mathcal{L}_2(H,H)}^2 + \alpha \|u\|_V^2 \leq \lambda \|u\|_H^2 + \nu.$$

En plus de cette hypothèse de coercivité, on va utiliser une hypothèse de monotonie qui va permettre d’identifier les limites sans utiliser de technique de compacité. On fera également l’hypothèse que l’opérateur Σ est Lipschitzien pour pouvoir appliquer le Théorème 2.8 sur les systèmes en dimensions finies.

Hypothèse 5.14 (Lipschitz et Monotone). *L’opérateur Σ est Lipschitzien sur V , c’est-à-dire qu’il existe une constante L telle que pour tout $u, v \in V$*

$$\|\Sigma(u) - \Sigma(v)\|_{\mathcal{L}_2(H,H)} \leq L \|u - v\|_V,$$

et les opérateurs A et Σ vérifient une hypothèse de monotonie, c'est-à-dire qu'il existe une constante $\mu \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $u, v \in V$

$$2\langle Au - Av, u - v \rangle_{V',V} + \|\Sigma(u) - \Sigma(v)\|_{\mathcal{L}_2(\mathbb{H},\mathbb{H})}^2 \leq \mu \|u - v\|_{\mathbb{H}}^2.$$

Remarque 5.15. Comme pour le Théorème 5.10 de la Sous-Section 5.3, on aurait pu considérer un opérateur A non-linéaire tel qu'il existe une constante $c > 0$ tel que pour tout $u \in V$

$$\|A(u)\|_{V'} \leq c(1 + \|u\|_V).$$

Comme ce qui a déjà été décrit dans la Remarque 5.12, on aurait ensuite pu considérer différentes méthodes. La méthode de monotonie est décrite dans [Par21] ou encore dans [PR07].

Remarque 5.16. On pourrait se ramener au cas $\Lambda := \max(\lambda, \mu) = 0$ par une transformation explicite. Notons $\tilde{A}(t) := Z \mapsto \exp(-\Lambda t/2)A(\exp(\Lambda t/2)Z) - \frac{\Lambda}{2}Z$ et $\tilde{\Sigma}(t) := Z \mapsto \exp(-\Lambda t/2)\Sigma(\exp(\Lambda t/2)Z)$ alors $Y := \exp(-\Lambda t/2)X$ est solution de

$$dY_t = \tilde{A}(t, Y_t)dt + \tilde{\Sigma}(t, Y(t))dW_t,$$

avec des opérateurs \tilde{A} et $\tilde{\Sigma}$ qui dépendent maintenant du temps $t \in [0, T]$.

Théorème 5.17. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité équipé d'une filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$. Soient A et Σ satisfaisant les Hypothèses 5.13 et 5.14. Soit une donnée initiale $X_0 \in \mathbb{H}$. Alors il existe une unique solution (sous forme faible) $\{X(t)\}_{t \in [0, T]}$ qui soit un processus stochastique adapté à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]}$ et dont les trajectoires sont presque sûrement dans $L^2([0, T]; V) \cap C([0, T]; \mathbb{H})$.

Proof. Comme dans le cas déterministe, on fait appel à un lemme qui est une forme préliminaire à la formule d'Itô du Théorème 5.7 :

Lemme 5.18 ([Par21, Chap.2, Lemme 2.14]). Soient $u_0 \in \mathbb{H}$, $\{u(t)\}_{t \in [0, T]}$ et $\{\psi(t)\}_{t \in [0, T]}$ deux processus adaptés à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]}$ dont les trajectoires sont respectivement dans $L^2([0, T]; V)$ et $L^2([0, T]; V')$. Soit $\{M_t\}_{t \in [0, T]}$ une martingale locale à valeurs dans \mathbb{H} telle que pour presque tout $t \in [0, T]$

$$u(t) = u_0 + \int_0^t \psi(s)ds + M_t,$$

alors $u \in C([0, T]; \mathbb{H})$ presque sûrement et on a la relation suivante presque sûrement pour tout $t \in [0, T]$

$$\|u(t)\|_{\mathbb{H}}^2 = \|u_0\|_{\mathbb{H}}^2 + 2 \int_0^t \langle \psi(s), u(s) \rangle_{V',V} ds + 2 \int_0^t \langle u(s), dM_s \rangle + \langle M \rangle_t,$$

où le terme d'intégrale stochastique est décrit dans la Définition 5.4 et le crochet $\langle M \rangle_t$ est décrit dans la Définition 5.1.

La démonstration du Lemme 5.18 n'est pas rappelée ici, mais il est le socle de la formule d'Itô. Démontrons maintenant l'unicité dans le Théorème 5.17. Soient X^1 et X^2 deux solutions adaptées dans $L^2([0, T]; V)$ et $C([0, T]; \mathbb{H})$. On définit le temps d'arrêt pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\tau_n := \inf \left\{ t \in [0, T] : \|X^1(t)\|_{\mathbb{H}}^2 \vee \|X^2(t)\|_{\mathbb{H}}^2 \vee \int_0^t (\|X^1(s)\|_V^2 + \|X^2(s)\|_V^2) ds \geq n \right\}$$

qui diverge vers $+\infty$ lorsque $n \rightarrow +\infty$. On remarque que $w(t) := X^1(t) - X^2(t)$ satisfait dans V'

$$w(t) = \int_0^t (AX^1(s) - AX^2(s))ds + \int_0^t (\Sigma(X^1(s)) - \Sigma(X^2(s)))dW_s.$$

Le dernier terme est une martingale locale notée M_t et son crochet est

$$\langle M \rangle_t = \int_0^t \|\Sigma(X^1(s)) - \Sigma(X^2(s))\|_{\mathcal{L}_2(\mathbb{H}, \mathbb{H})}^2 ds.$$

Si on arrête la martingale au temps τ_n alors c'est une vraie martingale d'espérance nulle. On peut appliquer le Lemme 5.18 sur w , et prendre l'espérance pour obtenir

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\|w(t \wedge \tau_n)\|_{\mathbb{H}}^2 &= 2\mathbb{E} \int_0^{t \wedge \tau_n} \langle AX^1(s) - AX^2(s), X^1(s) - X^2(s) \rangle_{V', V} ds \\ &\quad + 0 + \mathbb{E} \int_0^{t \wedge \tau_n} \|\Sigma(X^1(s)) - \Sigma(X^2(s))\|_{\mathcal{L}_2(\mathbb{H}, \mathbb{H})}^2 ds. \end{aligned}$$

On applique l'Hypothèse 5.14 pour obtenir

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\|w(t \wedge \tau_n)\|_{\mathbb{H}}^2 &\leq \mu \mathbb{E} \int_0^{t \wedge \tau_n} \|X^1(s) - X^2(s)\|_{\mathbb{H}}^2 ds \\ &\leq \mu \int_0^t \mathbb{E}\|X^1(s \wedge \tau_n) - X^2(s \wedge \tau_n)\|_{\mathbb{H}}^2 ds \\ &\leq \mu \int_0^t \mathbb{E}\|w(s \wedge \tau_n)\|_{\mathbb{H}}^2 ds. \end{aligned}$$

Le lemme de Grönwall assure alors l'unicité presque sûrement.

Démontrons maintenant l'existence d'une solution encore à l'aide d'une méthode de Galerkin. On considère toujours la famille $(e_k)_{k \geq 1}$ qui est une base orthonormée dans \mathbb{H} composée d'éléments de V . On pose alors pour tout $n \geq 1$ l'unique processus adapté $X_n \in \mathcal{C}([0, T]; V_n)$ tel que presque sûrement pour tout $t \in [0, T]$, pour tout $1 \leq k \leq n$,

$$\langle X_n(t), e_k \rangle_{\mathbb{H}} = \langle X_0, e_k \rangle_{\mathbb{H}} + \int_0^t \langle AX_n(s), e_k \rangle_{V', V} ds + \sum_{m=1}^n \int_0^t \langle \Sigma(X_n(s))e_m, e_k \rangle_{\mathbb{H}} dB_s^m. \quad (21)$$

Ce processus existe car l'opérateur A est linéaire continu donc lipschitzien sur V_n , et par l'Hypothèse 5.14 l'opérateur Σ est lipschitzien donc on peut appliquer le Théorème 2.8.

Par la formule d'Itô du Théorème 2.5, on obtient pour tout $n \geq 1$, presque sûrement pour tout $t \in [0, T]$, pour tout $1 \leq k \leq n$,

$$\begin{aligned} \langle X_n(t), e_k \rangle_{\mathbb{H}}^2 &= \langle X_0, e_k \rangle_{\mathbb{H}}^2 + 2 \int_0^t \langle X_n(s), e_k \rangle_{\mathbb{H}} \langle AX_n(s), e_k \rangle_{V', V} ds \\ &\quad + 2 \sum_{m=1}^n \int_0^t \langle X_n(s), e_k \rangle_{\mathbb{H}} \langle \Sigma(X_n(s))e_m, e_k \rangle_{\mathbb{H}} dB_s^m + \sum_{m=1}^n \int_0^t \langle \Sigma(X_n(s))e_m, e_k \rangle_{\mathbb{H}}^2 ds. \end{aligned}$$

En sommant les équations sur l'indice k on obtient une estimation de la norme de X_n de la forme

$$\begin{aligned} \|X_n(t)\|_{\mathbb{H}}^2 &\leq \|X_0\|_{\mathbb{H}}^2 + 2 \int_0^t \langle AX_n(s), X_n(s) \rangle_{V', V} ds \\ &\quad + 2 \sum_{m=1}^n \int_0^t \langle \Sigma(X_n(s))e_m, X_n(s) \rangle_{\mathbb{H}} dB_s^m + \int_0^t \|\Sigma(X_n(s))\|_{\mathcal{L}_2(\mathbb{H}, \mathbb{H})}^2 ds. \end{aligned} \quad (22)$$

En prenant l'espérance, le terme d'intégrale stochastique disparaît et on obtient pour tout $t \in [0, T]$, pour tout $n \geq 1$

$$\mathbb{E}\|X_n(t)\|_{\mathbb{H}}^2 \leq \mathbb{E}\|X_0\|_{\mathbb{H}}^2 + 2\mathbb{E} \int_0^t \langle AX_n(s), X_n(s) \rangle_{V',V} ds + \mathbb{E} \int_0^t \|\Sigma(X_n(s))\|_{\mathcal{L}_2(\mathbb{H},\mathbb{H})}^2 ds, \quad (23)$$

ce qui fournit par l'Hypothèse 5.13 l'inégalité suivante pour tout $t \in [0, T]$, pour tout $n \geq 1$

$$\mathbb{E} \left[\|X_n(t)\|_{\mathbb{H}}^2 + \alpha \int_0^t \|X_n(s)\|_{\mathbb{V}}^2 ds \right] \leq \mathbb{E}\|X_0\|_{\mathbb{H}}^2 + \lambda \mathbb{E} \int_0^t \|X_n(s)\|_{\mathbb{H}}^2 ds + \nu t.$$

Le lemme de Grönwall permet d'obtenir qu'il existe une constante $R \in \mathbb{R}_+$ qui dépend de T, λ, ν et X_0 telle que

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{0 \leq t \leq T} \mathbb{E}\|X_n(t)\|_{\mathbb{H}}^2 \leq R < +\infty. \quad (24)$$

Et par cette première estimation, on obtient qu'il existe une constante $R \in \mathbb{R}_+$ qui dépend de T, α, λ, ν et X_0 telle que

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E} \int_0^T \|X_n(t)\|_{\mathbb{V}}^2 \leq R < +\infty. \quad (25)$$

Dans la majoration (24), le supremum en temps est à l'extérieur de l'espérance, mais on peut améliorer ce résultat. Partant de l'Inégalité (22), on obtient avec l'Hypothèse 5.13 l'estimation

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq t \leq T} \|X_n(t)\|_{\mathbb{H}}^2 &\leq \|X_0\|_{\mathbb{H}}^2 + \lambda \int_0^T \|X_n(s)\|_{\mathbb{H}}^2 ds + \nu T \\ &\quad + 2 \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \sum_{m=1}^n \int_0^t \langle \Sigma(X_n(s))e_m, X_n(s) \rangle dB_s^m \right|. \end{aligned}$$

On utilise ensuite l'inégalité de Burkholder-Davis-Gundy sur les martingales pour obtenir qu'il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} \left[2 \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \sum_{m=1}^n \int_0^t \langle \Sigma(X_n(s))e_m, X_n(s) \rangle dB_s^m \right| \right] \leq c \mathbb{E} \left[\sqrt{\sum_{m=1}^n \int_0^T \langle \Sigma(X_n(s))e_m, X_n(s) \rangle^2 ds} \right] \\ &\leq c \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} \|X_n(t)\|_{\mathbb{H}} \sqrt{\int_0^T \|\Sigma(X_n(s))\|_{\mathcal{L}_2(\mathbb{H},\mathbb{H})}^2 ds} \right] \\ &\leq \frac{1}{2} \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} \|X_n(t)\|_{\mathbb{H}}^2 \right] + \frac{c^2}{2} \mathbb{E} \left[\int_0^T \|\Sigma(X_n(s))\|_{\mathcal{L}_2(\mathbb{H},\mathbb{H})}^2 ds \right]. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité $\|\Sigma(X_n(s))\|_{\mathcal{L}_2(\mathbb{H},\mathbb{H})}^2 \leq 2\|\Sigma(X_n(s)) - \Sigma(0)\|_{\mathcal{L}_2(\mathbb{H},\mathbb{H})}^2 + 2\|\Sigma(0)\|_{\mathcal{L}_2(\mathbb{H},\mathbb{H})}^2$, l'Hypothèse 5.14, et l'Inégalité (17), on obtient

$$\frac{1}{2} \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} \|X_n(t)\|_{\mathbb{H}}^2 \right] \leq \|X_0\|_{\mathbb{H}}^2 + (\lambda + c^2 L^2) \mathbb{E} \left[\int_0^T \|X_n(s)\|_{\mathbb{V}}^2 ds \right] + (c^2 \|\Sigma(0)\|_{\mathcal{L}_2(\mathbb{H},\mathbb{H})}^2 + \nu) T.$$

Avec l'estimation (25), on obtient que la suite $(X_n)_{n \geq 1}$ est bornée dans $L^2(\Omega; \mathcal{C}([0, T]; \mathbb{H})) \cap L^2(\Omega; L^2([0, T]; \mathbb{V}))$. Donc les suites $(AX_n)_{n \geq 1}$, $(\Sigma(X_n))_{n \geq 1}$ et $(X_n(T))_{n \geq 1}$ sont également bornées respectivement dans $L^2(\Omega; L^2([0, T]; V'))$, $L^2(\Omega; L^2([0, T]; \mathcal{L}_2(\mathbb{H}, \mathbb{H})))$ et $L^2(\Omega; \mathbb{H})$. On peut donc extraire une sous-suite $(X_n)_{n \geq 1}$ telle qu'on ait les convergences faibles suivantes :

$$\begin{aligned}
X_n &\rightharpoonup X \text{ dans } L^2(\Omega; L^2([0, T]; V)), \\
AX_n &\rightharpoonup \chi \text{ dans } L^2(\Omega; L^2([0, T]; V')), \\
\Sigma(X_n) &\rightharpoonup \Xi \text{ dans } L^2(\Omega; L^2([0, T]; \mathcal{L}_2(\mathbb{H}, \mathbb{H}))), \\
X_n(T) &\rightharpoonup \xi \text{ dans } L^2(\Omega; \mathbb{H}).
\end{aligned}$$

On a également que $X_n \rightharpoonup^* X$ dans $L^2(\Omega; L^\infty([0, T]; \mathbb{H}))$.

Soit $\Phi \in L^2(\Omega; L^2([0, T]; V))$, alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \int_0^T \langle X_n(t), \Phi(t) \rangle_{\mathbb{H}} dt &= \mathbb{E} \int_0^T \langle X_0, \Pi_n \Phi(t) \rangle_{\mathbb{H}} dt + \mathbb{E} \int_0^T \int_0^t \langle AX_n(s), \Pi_n \Phi(t) \rangle_{V', V} ds dt \\
&\quad + \mathbb{E} \int_0^T \left\langle \int_0^t \Sigma(X_n(s)) \Pi_n dW_s, \Pi_n \Phi(t) \right\rangle_{\mathbb{H}} dt.
\end{aligned}$$

Chaque terme de l'équation précédente converge vers une limite, et on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \int_0^T \langle X(t), \Phi(t) \rangle_{\mathbb{H}} dt &= \mathbb{E} \int_0^T \langle X_0, \Phi(t) \rangle_{\mathbb{H}} dt + \mathbb{E} \int_0^T \int_0^t \langle \chi(s), \Phi(t) \rangle_{V', V} ds dt \\
&\quad + \mathbb{E} \int_0^T \left\langle \int_0^t \Xi(s) dW_s, \Phi(t) \right\rangle_{\mathbb{H}} dt.
\end{aligned}$$

Le Lemme 5.18 implique alors que le processus X est presque sûrement continu à valeurs dans \mathbb{H} et en particulier au point $t = T$, on a

$$\|X(T)\|_{\mathbb{H}}^2 = \|X_0\|_{\mathbb{H}}^2 + 2 \int_0^T \langle \chi(t), X(t) \rangle_{V', V} ds + 2 \int_0^T \langle X(t), dM_t \rangle + \langle M \rangle_T, \quad (26)$$

avec $M_t = \sum_{m=1}^{+\infty} \int_0^t \Xi(s) e_m dB_s^m$ pour tout $t \in [0, T]$ qui est une martingale dans \mathbb{H} . En prenant l'espérance dans l'Équation (26), en remarquant que $\mathbb{E} \int_0^T \|\Xi(t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{H}, \mathbb{H})}^2 dt = \mathbb{E} \langle M \rangle_T$, on obtient

$$\mathbb{E} \|X(T)\|_{\mathbb{H}}^2 = \mathbb{E} \|X_0\|_{\mathbb{H}}^2 + 2 \mathbb{E} \int_0^T \langle \chi(t), X(t) \rangle_{V', V} ds + \mathbb{E} \int_0^T \|\Xi(t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{H}, \mathbb{H})}^2 dt. \quad (27)$$

Soit $n^* \geq 1$ fixé, soit $v \in V_{n^*}$, alors en passant à la limite dans l'Équation (21), on obtient en $t = T$ que

$$\begin{aligned}
\langle \xi, v \rangle_{\mathbb{H}} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \langle X_n(T), v \rangle_{\mathbb{H}} \\
&= \langle X_0, v \rangle_{\mathbb{H}} + \int_0^T \langle \chi(t), v \rangle_{V', V} dt + \sum_{m=1}^{+\infty} \int_0^T \langle \Xi(t) e_m, v \rangle_{\mathbb{H}} dB_t^m = \langle X(T), v \rangle_{\mathbb{H}}.
\end{aligned}$$

Par densité de V dans \mathbb{H} , on conclut que $\xi = X(T)$. Il reste donc à identifier AX avec χ et $\Sigma(X)$ avec Ξ pour conclure. Comme A est linéaire, on a bien l'identification $AX = \chi$, mais on peut le montrer d'une autre manière (appelée l'astuce de Minty) présentée ici et qui s'adapte au cas où l'opérateur A est non-linéaire. La méthode permet également de montrer que $\Sigma(X) = \Xi$.

Pour tout $\Phi \in L^2(\Omega; L^2([0, T]; V))$, en utilisant l'Hypothèse 5.14, on obtient que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
&2\mathbb{E} \int_0^T \langle AX_n(t) - A\Phi(t), X_n(t) - \Phi(t) \rangle_{V', V} dt + \mathbb{E} \int_0^T \|\Sigma(X_n(t)) - \Sigma(\Phi(t))\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{H}, \mathbb{H})}^2 dt \\
&\leq \mu \mathbb{E} \int_0^T \|X_n(t) - \Phi(t)\|_{\mathbb{H}}^2 dt.
\end{aligned}$$

On fait ici l'hypothèse que $\mu \leq 0$ dans l'Hypothèse 5.14 pour simplifier la démonstration. On consultera la Remarque 5.16 à ce propos.

Les convergences faibles assurent que la plupart des termes précédents ont une limite identifiable d'où

$$\begin{aligned}
 & \liminf_{n \rightarrow +\infty} 2\mathbb{E} \int_0^T \langle AX_n(t), X_n(t) \rangle_{V',V} dt + \liminf_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E} \int_0^T \|\Sigma(X_n(t))\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{H},\mathbb{H})}^2 dt \\
 & \leq 2\mathbb{E} \int_0^T \langle \chi(t), \Phi(t) \rangle_{V',V} dt + 2\mathbb{E} \int_0^T \langle A\Phi(t), X(t) - \Phi(t) \rangle_{V',V} dt \\
 & + 2\mathbb{E} \int_0^T \langle \Xi(t), \Sigma(\Phi(t)) \rangle_{\mathcal{L}^2(\mathbb{H},\mathbb{H})} dt - \mathbb{E} \int_0^T \|\Sigma(\Phi(t))\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{H},\mathbb{H})}^2 dt.
 \end{aligned} \tag{28}$$

On passe à la limite inférieure dans l'Équation (23) qu'on injecte dans l'Équation (28) pour obtenir

$$\begin{aligned}
 & \liminf_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E} \|X_n(T)\|_{\mathbb{H}}^2 - \mathbb{E} \|X_0\|_{\mathbb{H}}^2 \\
 & \leq 2\mathbb{E} \int_0^T \langle \chi(t), \Phi(t) \rangle_{V',V} dt + 2\mathbb{E} \int_0^T \langle A\Phi(t), X(t) - \Phi(t) \rangle_{V',V} dt \\
 & + 2\mathbb{E} \int_0^T \langle \Xi(t), \Sigma(\Phi(t)) \rangle_{\mathcal{L}^2(\mathbb{H},\mathbb{H})} dt - \mathbb{E} \int_0^T \|\Sigma(\Phi(t))\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{H},\mathbb{H})}^2 dt.
 \end{aligned} \tag{29}$$

Remarquons que $\mathbb{E} \|X(T)\|_{\mathbb{H}}^2 \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E} \|X_n(T)\|_{\mathbb{H}}^2$ par passage à la limite dans l'inégalité $\mathbb{E} \|X_n(T)\|_{\mathbb{H}}^2 + \mathbb{E} \|X(T)\|_{\mathbb{H}}^2 - 2\mathbb{E} \langle X_n(T), X(T) \rangle_{\mathbb{H}} = \mathbb{E} \|X_n(T) - X(T)\|_{\mathbb{H}}^2 \geq 0$. Ainsi, en injectant l'Équation (27) dans l'Équation (29), on obtient

$$\begin{aligned}
 & 2\mathbb{E} \int_0^T \langle \chi(t), X(t) \rangle_{V',V} dt + \mathbb{E} \int_0^T \|\Xi(t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{H},\mathbb{H})}^2 dt \\
 & \leq 2\mathbb{E} \int_0^T \langle \chi(t), \Phi(t) \rangle_{V',V} dt + 2\mathbb{E} \int_0^T \langle A\Phi(t), X(t) - \Phi(t) \rangle_{V',V} dt \\
 & + 2\mathbb{E} \int_0^T \langle \Xi(t), \Sigma(\Phi(t)) \rangle_{\mathcal{L}^2(\mathbb{H},\mathbb{H})} dt - \mathbb{E} \int_0^T \|\Sigma(\Phi(t))\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{H},\mathbb{H})}^2 dt.
 \end{aligned}$$

Donc on obtient la majoration suivante valable pour tout $\Phi \in L^2(\Omega; L^2([0, T]; V))$

$$2\mathbb{E} \int_0^T \langle \chi(t) - A\Phi(t), X(t) - \Phi(t) \rangle_{V',V} dt + \mathbb{E} \int_0^T \|\Xi(t) - \Sigma(\Phi(t))\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{H},\mathbb{H})}^2 dt \leq 0.$$

En choisissant $\Phi = X$, on obtient directement que $\Xi = \Sigma(X)$ dans $L^2(\Omega; L^2([0, T]; \mathcal{L}^2(\mathbb{H}, \mathbb{H})))$. Puis en posant $\Phi = X - \theta\Psi$ avec $\theta > 0$ et $\Psi \in L^2(\Omega; L^2([0, T]; V))$ quelconque, on obtient

$$\theta \mathbb{E} \int_0^T \langle \chi(t) - A(X(t) - \theta\Psi(t)), \Psi(t) \rangle_{V',V} dt \leq 0.$$

Dans le cas où A est un opérateur linéaire, la quantité précédente est un polynôme de degré 2, et on conclut directement. Mais sinon, on divise par θ , et on utilise l'hypothèse de continuité de la fonction Θ décrite dans la Remarque 5.12 pour déduire que

$$\mathbb{E} \int_0^T \langle \chi(t) - AX(t), \Psi(t) \rangle_{V',V} dt \leq 0$$

pour tout $\Psi \in L^2(\Omega; L^2([0, T]; V))$, ce qui impose $\chi = AX$ dans $L^2(\Omega; L^2([0, T]; V'))$.

On avait déjà obtenu la continuité des trajectoires dans H par le Lemme 5.18 appliqué au processus X tel que pour tout $t \in [0, T]$, $X(t) = \xi + \int_0^t \chi(s) ds + \int_0^t \Xi(s) dW_s$. Par identification des limites, on obtient l'existence d'un processus X dont les trajectoires sont presque sûrement dans $L^2([0, T]; V) \cap \mathcal{C}([0, T]; H)$ tel que pour tout $t \in [0, T]$

$$X(t) = X_0 + \int_0^t AX(s) ds + \int_0^t \Sigma(X(s)) dW_s.$$

Et par unicité des solutions, puisque toutes les suites extraites précédemment convergent vers la même limite, alors la suite $(X_n)_{n \geq 1}$ converge vers X sans extraction. \square

En approchant l'équation aux dérivées partielles stochastique (20) par un système d'équations différentielles stochastiques en dimension finie n , et en obtenant des estimées *a priori* uniformes en la dimension n , on a pu exhiber une limite à la famille $(X_n)_{n \geq 1}$. Ces estimées permettent également d'obtenir des contrôles sur les termes non-linéaires pour montrer l'existence d'une limite faible pour chaque terme. La deuxième étape consiste à identifier les limites faibles de chaque terme avec la limite voulue. Cette étape d'identification (même pour un terme non linéaire) ne nécessite pas de convergence forte grâce à l'hypothèse de monotonie.

5.5. Suite des exercices sur le chapitre 5

Exercice 5.4. Soit $\mathcal{D} = [0, 1] \subset \mathbb{R}$. On va montrer des propriétés de l'opérateur A la réalisation du Laplacien Δ dans ce domaine \mathcal{D} avec des conditions de Dirichlet homogènes sur la frontière $\partial\mathcal{D}$ pour résoudre l'équation aux dérivées partielles stochastique de la chaleur.

- Montrer que les trois espaces $V := H_0^1(\mathcal{D})$, $V' := H^{-1}(\mathcal{D})$ et $H := L^2(\mathcal{D})$ constituent un triplet de Gelfand.
- Montrer que l'opérateur $A \in \mathcal{L}(V, V')$ défini pour tout $v \in V$ et pour tout $u \in V$ par

$$Av[u] = - \int_{\mathcal{D}} \nabla v \nabla u$$

est bien continu de V dans V' .

- Soit $f \in V'$ une forme linéaire continue sur V , montrer qu'il existe une unique solution g dans V au problème variationnel tel pour tout $u \in V$

$$\int_{\mathcal{D}} \nabla g \nabla u = f[u].$$

On peut noter $\langle f, u \rangle_{V', V} := \langle \nabla g, \nabla u \rangle_H$, c'est-à-dire $(-A)^{-1}f = g$.

- Montrer que l'opérateur A vérifie l'hypothèse 5.9.
- Soit Σ un opérateur constant Hilbert-Schmidt de H dans H , c'est-à-dire qu'on va considérer un bruit additif. Montrer que, pour toute donnée initiale $X_0 \in H$, l'équation aux dérivées partielles stochastique suivante

$$dX_t = AX_t dt + \Sigma dW_t$$

admet une unique solution faible dont les trajectoires sont presque sûrement dans $L^2([0, T]; V) \cap \mathcal{C}([0, T]; H)$.

- Décrire la loi de cette solution.

6. CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Dans ces notes, on a vu comment résoudre des équations aux dérivées partielles stochastiques de la forme

$$dX_t = AX_t dt + \Sigma dW_t$$

avec W un processus de Wiener cylindrique et Σ un opérateur constant (bruit additif). On a utilisé des méthodes de semi-groupe présentées dans la Section 4, et des extensions sont décrites dans les exercices en Sous-Section 4.4. Cette approche est un point central de la théorie des équations aux dérivées partielles stochastiques car beaucoup de méthodes même récentes se basent sur des propriétés fines de régularisation des semi-groupes, et sur la régularité locale des solutions mild (voir la Définition 4.14).

Dans la Sous-Section 4.3, on a pu traiter le cas simple de l'équation de la chaleur stochastique sur le cube avec des conditions de Dirichlet homogènes dirigée par un bruit blanc espace-temps.

On peut généraliser cette approche pour des équations aux dérivées partielles stochastiques non-linéaires de la forme

$$dX_t = AX_t dt + F(X_t) dt + \Sigma dW_t,$$

par exemple par des méthodes de point fixe, dès que la fonction F vérifie des hypothèses de régularité et de croissance, typiquement F doit être globalement (ou localement) Lipschitzienne et à croissance au plus polynomiale. On pourra consulter [Bré14] pour plus de détails.

On a également vu comment résoudre des équations aux dérivées partielles stochastiques avec un bruit multiplicatif de la forme

$$dX_t = AX_t dt + \Sigma(X_t) dW_t$$

en utilisant une approche variationnelle basée sur une méthode de Galerkin, dans le cas où A est un opérateur de V dans V' et Σ est Hilbert-Schmidt de H dans H . C'est le contenu de la Section 5 et le Théorème 5.17 assure l'existence et l'unicité d'une solution à trajectoires continues dans H .

On peut généraliser cette approche pour des équations aux dérivées partielles stochastiques non-linéaires de la forme

$$dX_t = AX_t dt + F(X_t) dt + \Sigma(X_t) dW_t,$$

où A , F et Σ vérifient des hypothèses de monotonie, de continuité et de coercivité (voir les Remarques 5.12 et 5.15). On pourra consulter les ouvrages [PR07] ou [Par21] pour plus de détails. Mais la méthode présentée ici se base fortement sur la propriété de monotonie, et on n'utilise pas de techniques évoluées de compacité qui pourraient s'avérer utiles pour traiter les termes non-linéaires.

La raison de ce choix est que la plupart des techniques de compacité nécessitent de contrôler a minima des translations en temps des solutions approchées X_n . Cela aurait alourdi ces notes, notamment par la nécessité d'introduire des espaces fonctionnels temps-espaces, alors qu'on utilise essentiellement des espaces de Lebesgue L^2 . Toutefois, les méthodes de compacité permettent d'obtenir de la tension sur les lois des processus aléatoires X_n et on peut alors construire des solutions en un sens faible probabiliste et des solutions martingales. Cela permet de considérer des équations aux dérivées partielles stochastiques beaucoup plus complexes, comme par exemple des équations de type Navier-Stokes.

BIBLIOGRAPHIE

- [Bre11] Haïm Brezis. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Universitext. Springer, 1 edition, 2011.
- [Bré14] Charles-Édouard Bréhier. *A short introduction to Stochastic PDEs*. HAL, 2014.
- [DPZ14] Giuseppe Da Prato and Jerzy Zabczyk. *Stochastic Equations in Infinite Dimensions*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge University Press, 2 edition, 2014.
- [Eva98] Lawrence C. Evans. *Partial differential equations*. Graduate studies in mathematics, v. 19. American Mathematical Society, 1998.
- [Kah85] Jean-Pierre Kahane. *Some random series of functions*, volume 5 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 1985.
- [Kol31] Andrey Kolmogoroff. Über die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung. *Math. Ann.*, 104(1):415–458, 1931.
- [KS91] Ioannis Karatzas and Steven E. Shreve. *Brownian motion and stochastic calculus*, volume 113 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1991.
- [LG16] Jean-François Le Gall. *Brownian motion, martingales, and stochastic calculus*, volume 274 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, [Cham], french edition, 2016.
- [Lio69] Jacques-Louis Lions. *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*. Gauthier-Villars, 1969.

- [LM68] Jacques-Louis Lions and Enrico Magenes. *Problèmes aux limites non homogènes et applications*. Number vol. 1 in Monographies universitaires de mathématiques. Dunod, 1968.
- [Mè82] Michel Métivier. *Semimartingales*. De Gruyter, Berlin, New York, 1982.
- [Par21] Étienne Pardoux. *Stochastic Partial Differential Equations - an introduction*. Springer, 2021.
- [PR07] Claudia Prévôt and Michael Röckner. *A Concise Course on Stochastic Partial Differential Equations*, volume 1905 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2007.
- [RY99] Daniel Revuz and Marc Yor. *Continuous martingales and Brownian motion*, volume 293 of *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, third edition, 1999.
- [Øk03] Bernt Øksendal. *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications*. Universitext. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 6 edition, 2003.